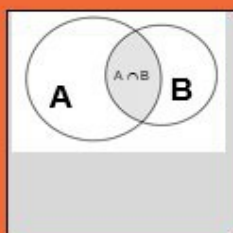
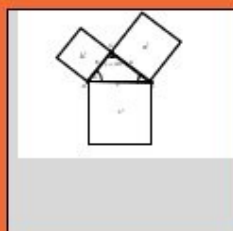
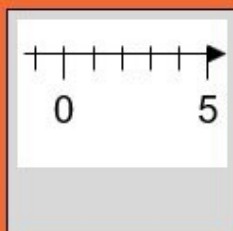
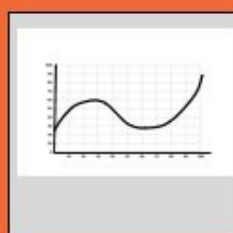


Mathematik verstehen

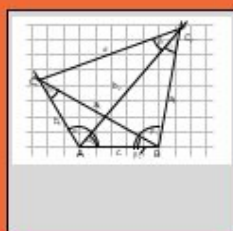
Von den Grundlagen bis zum Integral



1,2,3,4,5,...
-3,-1,1,3,...
 $1+1/2+1/4+$



$$\lim f(x) = g$$
$$y' = \frac{dy}{dx}$$



$$\int_a^b y \cdot dx$$

Herzlich willkommen!

In dieser Datei findest Du sämtliche Seitenabschlussfotos meiner bisher erstellten YOUTUBE-Videos.

Werner Fricke

Foliensammlung Mathematik verstehen

Inhaltsverzeichnis

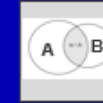
1 Grundlagen der Mengenlehre	5
1.1 Definition, Darstellung und Mächtigkeit von Mengen, Venn Diagramm.....	5
1.1.1 Definition des Mengenbegriffs nach Cantor.....	5
1.1.2 Darstellung von Mengen.....	6
1.1.3 Mächtigkeit von Mengen 1.....	7
1.1.4 Mächtigkeit von Mengen 2.....	8
1.2 Mengenlehre Eigenschaften - Teil-, Unter-, Obermenge und Gleichheit von Mengen.....	9
1.2.1 Beschreibung von Mengen durch ihre Eigenschaften.....	9
1.2.2 Teilmenge und Untermenge	10
1.2.3 Obermenge, nicht Teilmenge, Gleichheit, Ungleichheit	11
1.2.4 Relationen zwischen Mengen	12
1.3 Mengenoperationen – Schnittmenge, disjunkte Menge, Schnittmenge mit Teilmenge.....	13
1.3.1 Der Begriff Operation, Definition der Schnittmenge.....	13
1.3.2 Schnittmenge mit Teilmenge, disjunkte Mengen.....	14
1.3.3 Beispiele für Schnittmengen.....	15
1.4 Mengenoperationen – Vereinigungsmenge disjunkter Mengen, Vereinigungsmenge mit Teilmenge.....	16
1.4.1 Definition der Vereinigungsmenge.....	16
1.4.2 Vereinigungsmenge mit ihrer Teilmenge	17
1.4.3 Beispiele für Vereinigungsmengen.....	18
1.5 Mengenoperationen – Differenzmenge (Restmenge).....	19
1.5.1 Definition der Differenzmenge (Restmenge)	19
1.5.2 Beispiele für Differenzmengen.....	20
1.6 Mengenoperationen – Symmetrische Differenz.....	21
1.6.1 Definition der symmetrischen Differenz.....	21
1.6.2 Beispiele für symmetrische Differenz.....	22
1.7 Mengenlehre – Zusammenfassung und Schreibweisen von Mengen.....	23
1.7.1 Definition des Mengenbegriffs und Mächtigkeit von Mengen.....	23
1.7.2 Schreibweise von Mengen und tabellarische Übersicht	24

2 Grundlagen der Arithmetik und Algebra.....	25
2.1 Zahlensysteme.....	25
2.1.1 Zahlenmengen – Zahlengerade – Eigenschaften.....	25
2.1.1.1 Zahlengerade – Definition rationaler Zahlen	25
2.1.1.2 Irrationale Zahlen – Menge der reellen Zahlen.....	26
2.1.1.3 Übersicht über die Zahlenmengen.....	27
2.1.2 Primzahlen und Primfaktoren.....	28
2.1.2.1 Definition von Primzahlen.....	28
2.1.2.2 Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren	29
2.1.3 Größter gemeinsamer Teiler.....	30
2.1.4 Das kleinste gemeinsame Vielfache.....	31
2.1.5 Das Dezimalsystem	32
2.1.5.1 Dezimalsystem in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$	32
2.1.5.2 Dezimalsystem in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$	33
2.1.6 Allgemeine Zahlensysteme.....	34
2.1.6.1 Gegenüberstellung der Systeme	34
2.1.6.2 Umrechnungen.....	35
2.2 Rechnen mit reellen Zahlen.....	36
2.2.1 Addition und Subtraktion.....	36
2.2.1.1 Die Addition.....	36
2.2.1.2 Die schriftliche Addition.....	37
2.2.1.3 Die schriftliche Addition mit Nachkommastellen.....	38
2.2.1.4 Die Subtraktion.....	39
2.2.2 Schriftliche Addition und Subtraktion.....	40
2.2.3 Multiplikation Grundlagen	41
2.2.3.1 Grundlagen der Multiplikation.....	41
2.2.3.2 Begriffe und Multiplikation negativer Zahlen.....	42
2.2.4 Schriftliche Multiplikation.....	43
2.2.4.1 Grundlagen der schriftlichen Multiplikation.....	43
2.2.4.2 Rechenschritte bei der schriftlichen Multiplikation.....	44
2.2.4.3 Schriftliche Multiplikation zweier Dezimalzahlen	45
2.2.5 Division Grundlagen	46
2.2.5.1 Grundlagen der Division.....	46
2.2.5.2 Division negativer Zahlen und mit Rest.....	47
2.2.6 Beispiele für die schriftliche Division.....	48
2.2.7 Schriftliche Division mit Rest.....	49
2.2.8 Die schriftliche Division mit Dezimalzahlen.....	50
2.2.9 Die schriftliche Division mit unendlichen periodischen Dezimalbrüchen.....	51
2.2.10 Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche.....	52
2.2.11 Grundlagen der Bruchrechnung.....	53
2.2.12 Umrechnung von Brüchen.....	54
2.2.13 Bruchrechnung – Kehrwert, Erweitern und Kürzen.....	55
2.2.14 Bruchrechnung – Addition	56
2.2.15 Bruchrechnung – Addition und Subtraktion	57
2.2.16 Bruchrechnung – Multiplikation.....	58
2.2.17 Bruchrechnung – Division.....	59
2.2.18 Reihenfolge der Rechenoperationen.....	60
2.2.18.1 Punktrechnung vor Strichrechnung.....	60
2.2.18.2 Kombinierte Verwendung aller Grundrechenarten.....	61

- 1 Grundlagen der Mengenlehre
 - 1.1 Definition, Darstellung und Mächtigkeit von Mengen, Venn Diagramm
 - 1.1.1 Definition des Mengenbegriffs nach Cantor

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Definition, Darstellung und Mächtigkeit von Mengen

Definition des Mengenbegriffs nach Cantor

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte werden „Elemente“ von M genannt.

In dieser Definition sind folgende Begriffe von besonderer Bedeutung:

Wohlunterschiedene Objekte:

Dies bedeutet, dass die Elemente einer Menge immer unterschiedlich und einzigartig sein müssen. Ein Element darf in einer Menge also nicht zweimal vorkommen. Eine Menge $\{\text{Tisch, Tisch, Tisch}\}$ gibt es demnach nicht. Stattdessen gibt es die Menge $\{\text{Tisch}\}$ mit genau einem Element. Dieses steht selbstverständlich als Stellvertreter für alle Tische.

Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens:

Dies impliziert, dass Mengen nicht nur aus Zahlen oder Gegenständen gebildet werden können, sondern auch aus allen möglichen Begriffsbestimmungen auch immaterieller Art.

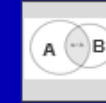
Zusammenfassung zu einem Ganzen:

Dies besagt, dass die Elemente einer Menge zu einem abgeschlossenen Ganzen gehören.

1.1.2 Darstellung von Mengen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Definition, Darstellung und Mächtigkeit von Mengen

Darstellung von Mengen

1) Eine Menge wird beschrieben, indem man die Elemente der Menge als Aufzählung in geschweifte Klammern setzt.

Beispiele

$M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $M_2 = \{\text{Fußball, Tisch, Hammer, Düsenflugzeug, Bakterie, Atom, Vakuum, Gedanke, Information}\}$

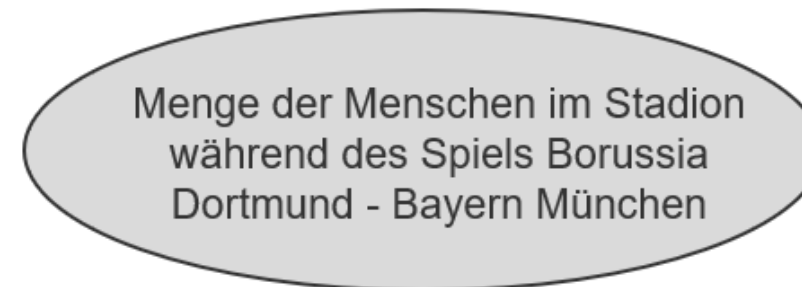
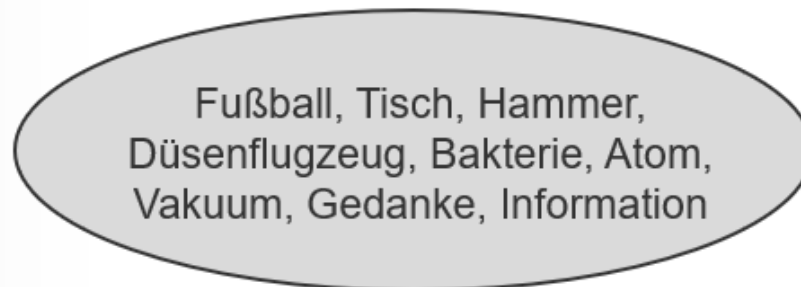
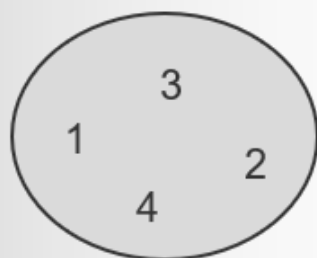
2) Eine Menge kann auch textlich beschrieben werden, wobei man die Beschreibung üblicherweise in geschweifte Klammern setzt.

Beispiele

$M_3 = \{\text{Menge der Menschen im Stadion während des Spiels Borussia Dortmund - Bayern München}\}$

$M_4 = \{\text{Menge der Gegenstände in einem bestimmten Raum}\}$

3) Darstellung als Mengendiagramm



Diese anschauliche Art der Darstellung wird auch Euler-Venn-Diagramm oder kurz Venn-Diagramm genannt.

1.1.3 Mächtigkeit von Mengen 1

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre****Definition, Darstellung und Mächtigkeit von Mengen****Mächtigkeit von Mengen**

Dies ist die Anzahl der Elemente einer Menge **M** und wird wie folgt geschrieben: $|M|$

Analog dazu schreibt man die Mächtigkeit einer Menge **K** : $|K|$

Betrachten wir unsere Menschenmenge: „ $M = \{\text{Menge der Menschen im Stadion beim Spiel Borussia Dortmund - Bayern München}\}$ “
dann können wir die Mächtigkeiten der Menge nur ungefähr abschätzen, z.B.:

Zahlende Zuschauer	80645 (ausverkauft)
Spieler und Schiedsrichter	26 (22 + 4)
Ersatzspieler und Betreuer	30 (geschätzt)
Ordner	600 (geschätzt)
Rundfunk, Fernsehen, Presse, ...	100 (geschätzt)
technische und organisatorische Mitarbeiter	200 (geschätzt)
Polizisten	100 (geschätzt)
Mächtigkeit	$ M \approx 81700$

Die Mächtigkeit der Menge „ $K = \{\text{Fußball, Tisch, Hammer, Düsenflugzeug, Bakterie, Atom, Vakuum, Gedanke, Information}\}$ “, kann man demgegenüber mit $|K| = 9$ genau angeben.

Die Mächtigkeit endlicher Mengen lässt sich also durch Abzählen ermitteln. Haben zwei Mengen dieselbe Anzahl von Elementen, dann nennt man diese gleichmächtig. Betrachten wir z.B. die Menge „ $O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ “, so ist diese gleichmächtig zur Menge K, also: .

$$|K| = |O| = 9$$

1.1.4 Mächtigkeit von Mengen 2

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre****Definition, Darstellung und Mächtigkeit von Mengen****Mächtigkeit von Mengen**

Neben endlichen Mengen gibt es auch noch unendliche Mengen, wie z.B. die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Da man immer weiter zählen kann und zu jeder beliebig großen Zahl n mindestens eine Zahl findet, die größer ist, nämlich $n + 1$, kann man sagen, dass die Mächtigkeit dieser Menge unendlich ist. Man schreibt dies so: $|\mathbb{N}| = \infty$

Weiterhin gibt es die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ebenfalls mit der Mächtigkeit: $|\mathbb{Z}| = \infty$

Wir stellen jetzt die Frage: „Welche der beiden Mengen $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ ist mächtiger oder sind etwa beide gleich mächtig?“

Auf den ersten Blick scheint die Antwort leicht zu sein, besitzt doch $\mathbb{Z}$ zusätzlich zu den Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ noch die Zahlen $-1, -2, -3, \dots$. Man könnte daraus folgern, dass die Mächtigkeit von $\mathbb{Z}$ etwa doppelt so groß ist wie die von $\mathbb{N}$, also: $|\mathbb{Z}| = 2 \cdot |\mathbb{N}| = 2 \cdot \infty$

Aber halt, ist denn 2 mal unendlich nicht auch gleich unendlich? Wenn ja, dann wären die beiden Mengen gleichmächtig.

Kriterium für Gleichmächtigkeit

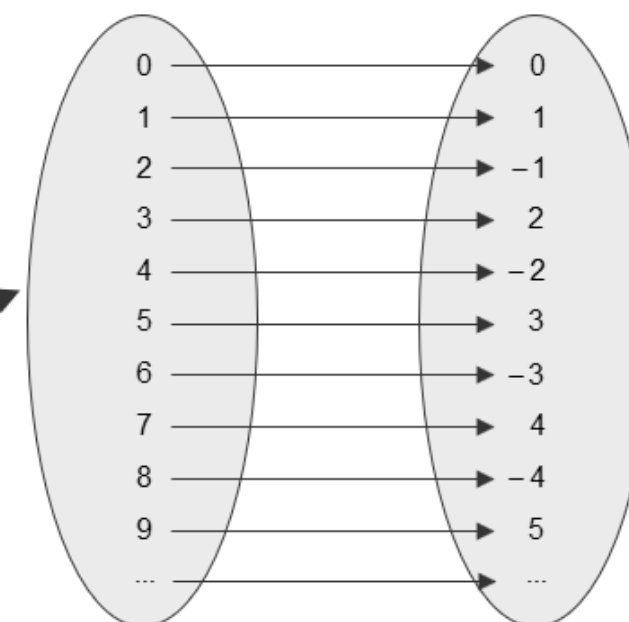
Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn man jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuordnen kann.

Wenn wir dies auf unsere Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ übertragen erhalten wir Folgendes:

Man kann jedem Element der linken Menge genau ein Element der rechten Menge zuordnen. Die beiden Mengen sind also gleichmächtig: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \infty$

Menge der
natürlichen
Zahlen $\mathbb{N}$

Menge der
ganzen
Zahlen $\mathbb{Z}$



1.2 Mengenlehre Eigenschaften - Teil-, Unter-, Obermenge und Gleichheit von Mengen

1.2.1 Beschreibung von Mengen durch ihre Eigenschaften

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre**

Beschreibung, Teilmengen, Ober-/Untermengen, Gleichheit

Beschreibung von Mengen durch ihre Eigenschaften

Beispiele für die Beschreibung von Zahlenmengen durch die gemeinsamen Eigenschaften ihrer Elemente:

$$1) M_1 = \{ x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl aus } \mathbb{N} \text{ mit } -3 < x \leq 2 \} = \{ 0, 1, 2 \}$$

Da für alle natürlichen Zahlen gilt $x \geq 0$ bleiben nur die 0 und Zahlen > 0 übrig.

$$2) M_2 = \{ x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl aus } \mathbb{Z} \text{ mit } -2 < x \leq 2 \} = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

$$3) M_3 = \{ x \mid x \text{ gehört zur Menge der natürlichen Zahlen } \mathbb{N} \} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Bisher haben wir zur Mengenbeschreibung die etwas umständlichen Ausdrücke für die Zugehörigkeit benutzt, z.B.: „gehört zur Menge der ...“ oder ähnlich. In der Mathematik verwendet man hierfür folgendes Kürzel:

$c \in M$ (gesprochen: c ist Element von M) Unsere Beispiele lassen sich jetzt wie folgt viel kürzer schreiben:

$$1) M_1 = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } -3 < x \leq 2 \} = \{ 0, 1, 2 \}$$

$$2) M_2 = \{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ mit } -2 < x \leq 2 \} = \{ -1, 0, 1, 2 \}$$

$$3) M_3 = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Neben dem Kürzel, welches die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Menge beschreibt, gibt es umgekehrt auch ein Zeichen, welches die Nichtzugehörigkeit beschreibt:

$c \notin M$ (gesprochen: c ist kein Element von M)

1.2.2 Teilmenge und Untermenge

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre**

Beschreibung, Teilmengen, Ober-/Untermengen, Gleichheit

Teilmengen

Wie wir am Beispiel des Fußballstadions gut erkennen konnten, besteht eine Menge aus Teilmengen.

Gegeben sei z.B. die folgende bekannte Menge: $M = \{\text{Menge der Menschen im Stadion beim Spiel Borussia Dortmund - Bayern München}\}$

So ist sicherlich die Menge: $B = \{\text{Spieler im Stadion beim Spiel Borussia Dortmund - Bayern München}\}$

eine Teilmenge der Menge M . Für Teilmengen hat man folgende Schreibweise eingeführt:

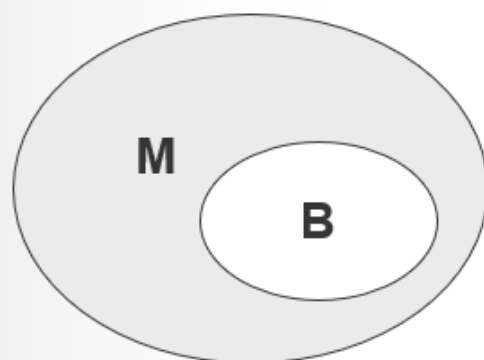
$B \subset M$ (gesprochen: B ist Teilmenge von M)

Definition einer Teilmenge: Eine Menge B ist Teilmenge von M , wenn jedes Element der Menge B auch in der Menge M enthalten ist.

Man sagt auch $M = \text{Obermenge}$

$B = \text{Teilmenge oder Untermenge}$

Diesen Sachverhalt kann man gut in einem Mengendiagramm darstellen:



Wenn man sich die Definition der Teilmenge genau durchliest, dann kommt man zu dem Schluss, dass jede Menge eine Teilmenge von sich selbst sein muss, denn selbstverständlich ist jedes Element der Menge M auch in M enthalten.

Logischerweise ist auch jedes einzelne Element einer Menge M Teilmenge von M .

Z.B. ist die Menge $S = \{\text{Schiedsrichter}\}$ Teilmenge von $M = \{\text{Menge der Menschen}\} \rightarrow (S \subset M)$.

Außerdem ist jede leere Menge $L = \{\}$ oder $L = \emptyset$ eine Teilmenge aller existierenden Mengen.

Also gilt: Für $L = \{\} \Rightarrow L \subset M$ für alle Mengen M

In der Literatur gibt es noch den Begriff der echten Teilmengen, bei denen die Anzahl der Elemente kleiner sein muss als die der zugehörigen Obermenge.

1.2.3 Obermenge, nicht Teilmenge, Gleichheit, Ungleichheit

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre**

Beschreibung, Teilmengen, Ober-/Untermengen, Gleichheit

Definition einer Obermenge

Eine Menge M ist Obermenge von K , wenn jedes Element der Menge K auch in der Menge M enthalten ist.

$M \supset K$ (gesprochen: M ist Obermenge von K)

Definition von nicht Teilmengen

Eine Menge K ist nicht Teilmenge einer anderen Menge M , wenn nicht jedes Element der Menge K auch in der Menge M enthalten ist:

$K \not\subset M$ (gesprochen: K ist nicht Teilmenge von M)

Definition der Gleichheit von Mengen

Ist K Teilmenge einer Menge M ist und die Mächtigkeit beider Mengen identisch, dann sind die beiden Mengen gleich, man schreibt:

Ist $K \subset M$ und $|K| = |M| \Rightarrow K = M$ (gesprochen: Ist K Teilmenge von M und Mächtigkeit von K gleich Mächtigkeit von M dann folgt $K = M$)

Man kann natürlich auch so formulieren: Ist K Teilmenge von M und ist gleichzeitig M Teilmenge von K , dann sind beide Mengen gleich:

Ist $K \subset M$ und $M \subset K \Rightarrow K = M$ (gesprochen: Ist K Teilmenge von M und M Teilmenge von K dann folgt K gleich M)

Definition der Ungleichheit von Mengen

Die Ungleichheit von Mengen folgt aus der Negation der Gleichheit von Mengen. Man schreibt wie folgt:

$K \neq M$ (gesprochen: K ungleich M)

1.2.4 Relationen zwischen Mengen

Mathematik verstehen 1
Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre
Beschreibung, Teilmengen, Ober-/Untermengen, Gleichheit

Beispiele für Relationen zwischen Mengen

1) $A = \{ 1, 2, 5, 7 \}$	$B = \{ 1, 2, 5, 7, 23, 45 \}$	$A \subset B$	$B \supset A$	$A \neq B$	$B \not\subset A$
2) $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x \leq 2 \}$	$B = \{ 1, 2 \}$	$A \subset B$	$B \subset A$	$A = B$	
3) $A = \{ 56, 88, 2, H, B \}$	$B = \{ H, 88, 56, B, 2 \}$	$A \subset B$	$B \subset A$	$A = B$	
4) $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 5 \leq x \leq 2 \}$	$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$	$A = \{ \}$	$A \subset B$	$B \supset A$	$A \neq B$ $B \not\subset A$
5) $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq x \leq 5 \}$	$B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$	$B \subset A$	$A \supset B$	$A \neq B$	$A \not\subset B$
6) $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 8 \leq x < 11 \}$	$B = \{ 8, 9, 10, 11 \}$	$A \subset B$	$B \supset A$	$A \neq B$	$B \not\subset A$
7) $A = \{ 0, 2, 4, 6 \}$	$B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$	$A \not\subset B$	$B \not\subset A$	$A \neq B$	
8) $A = \{ 0, 2, 4, 6 \}$	$B = \{ \}$	$B \subset A$	$A \supset B$	$A \neq B$	$A \not\subset B$

Lösungsmöglichkeiten

$A \subset B$

$A \supset B$

$B \subset A$

$B \supset A$

$A = B$

$A \neq B$

$A \not\subset B$

$B \not\subset A$

$A = \{ \}$

A ist Teilmenge von B

A ist Obermenge von B

B ist Teilmenge von A

B ist Obermenge von A

A gleich B

A ungleich B

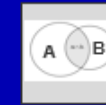
A ist nicht Teilmenge von B

B ist nicht Teilmenge von A

A gleich leere Menge

1.3 Mengenoperationen – Schnittmenge, disjunkte Menge, Schnittmenge mit Teilmenge

1.3.1 Der Begriff Operation, Definition der Schnittmenge

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre****Mengenoperationen – Schnittmenge****Der Begriff „Operation“ in der Mathematik**

Unter einer „Operation“ versteht man in der Mathematik die Verknüpfung von zwei oder mehr Elementen, z.B. von Zahlen oder auch Mengen. Dabei stehen die Operatoren jeweils zwischen den zu verknüpfenden Elementen.

Z.B. lauten die Operatoren der Grundrechenarten: $+$ Plus $\rightarrow$ Addition $-$ Minus $\rightarrow$ Subtraktion $\cdot$ Mal $\rightarrow$ Multiplikation $:$ geteilt durch $\rightarrow$ Division

Ein Operator ist in diesem Zusammenhang eine mathematische Handlungsvorschrift, wie mit den Elementen der Operation – den Operanden – zu verfahren ist. Mit Hilfe von Mengenoperatoren werden zwei oder mehr Mengen zu einer neuen Menge verknüpft.

Folgende Operatoren werden in der Mengenlehre unterschieden: $\cap$ Durchschnitt $\cup$ Vereinigung $\setminus$ Differenz Δ Symmetrische Differenz

Definition der Schnittmenge

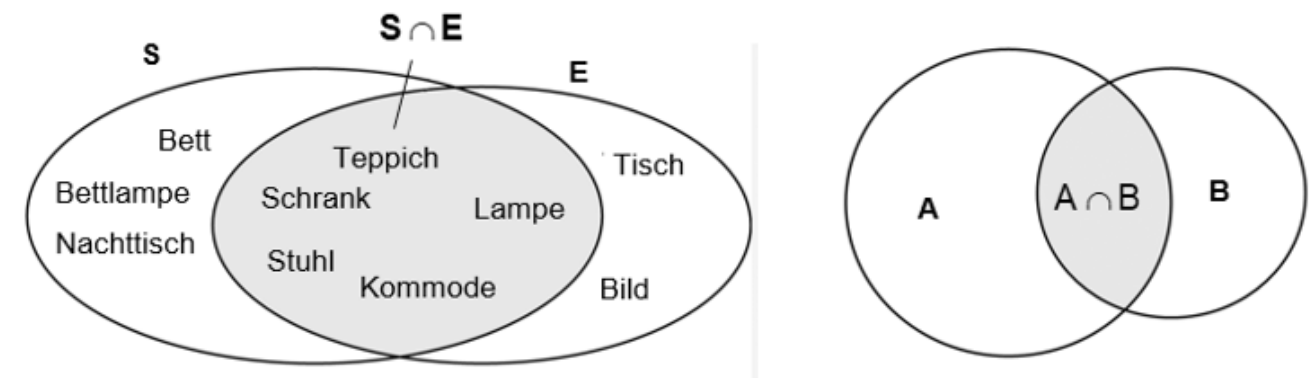
Die Schnittmenge der Mengen A und B ist diejenige Menge, welche alle Elemente enthält, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

Man kann auch sagen, dass alle Elemente der Schnittmenge sowohl in A als auch in B vorkommen.

Also kann man schreiben: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

gesprochen:

A geschnitten mit B = x mit x ist Element von A und x ist Element von B



Darstellungen von Schnittmengen im Mengendiagramm

1.3.2 Schnittmenge mit Teilmenge, disjunkte Mengen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral**

Grundlagen der Mengenlehre

Mengenoperationen – Schnittmenge

Schnittmenge einer Menge mit ihrer Teilmenge:

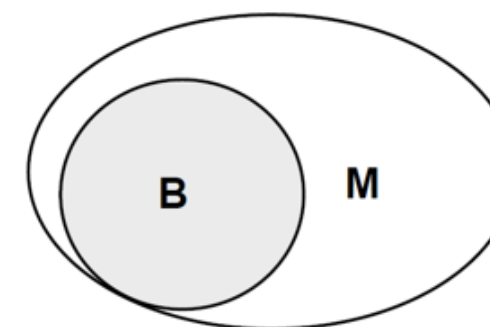
Eine Teilmenge ist so definiert, dass jedes ihrer Elemente auch in der Obermenge enthalten ist. Die Teilmenge enthält also alle Elemente die sowohl zur Teilmenge als auch zur Obermenge gehören.

Dies ist aber auch die Definition der Schnittmenge, so dass man sagen kann:

Die Teilmenge B einer Menge M ist identisch mit der Schnittmenge von B und M.

Wenn $B \subset M \Rightarrow B \cap M = B$

(gesprochen: wenn B Teilmenge von M so folgt Schnittmenge von B und M = B)



Teilmenge und Schnittmenge

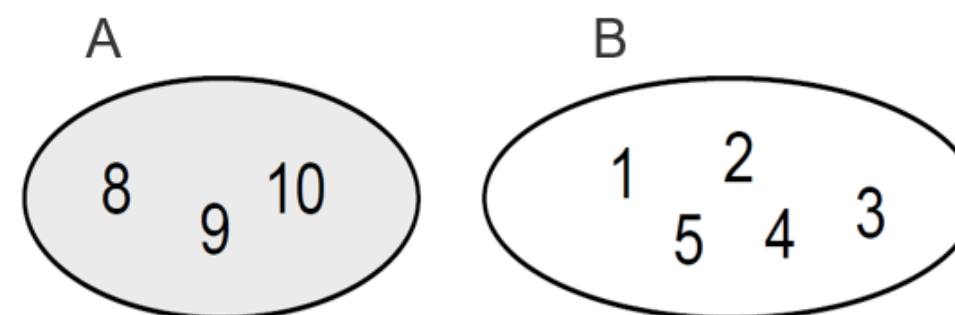
Schnittmenge von Mengen ohne gemeinsame Elemente (disjunkte Mengen)

Haben zwei Mengen keine gemeinsamen Elemente, dann ist die Schnittmenge dieser beiden Mengen leer. Diese Mengen werden auch als disjunkt bezeichnet:

Beispiel:

für $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } 8 \leq x < 11\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{\}$

(gesprochen: für A = x mit x ist Element von $\mathbb{N}$ und 8 kleiner gleich x kleiner 11 und $B = 1, 2, 3, 4, 5$ folgt Schnittmenge von A und B gleich leere Menge)

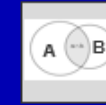


Disjunkte Mengen

1.3.3 Beispiele für Schnittmengen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

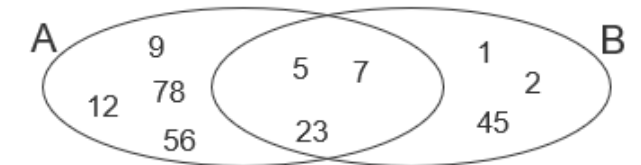
Mengenoperationen – Schnittmenge

Beispiele für Schnittmengen

1) $A = \{5, 7, 9, 12, 23, 56, 78\}$

$B = \{1, 2, 5, 7, 23, 45\}$

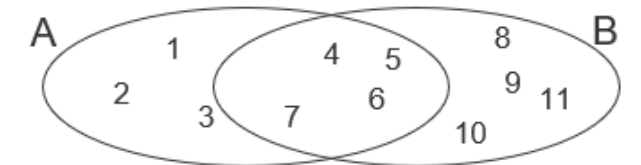
$A \cap B = \{5, 7, 23\}$



2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x \leq 7\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 4 \leq x < 12\}$

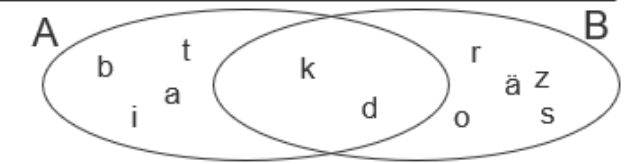
$A \cap B = \{4, 5, 6, 7\}$



3) $A = \{a, b, k, d, t, i\}$

$B = \{r, z, k, s, d, o, ä\}$

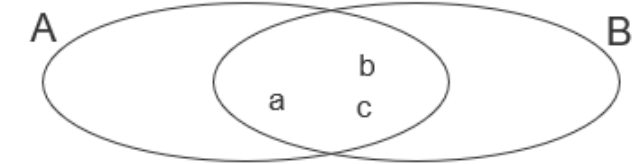
$A \cap B = \{k, d\}$



4) $A = \{a, b, c\}$

$B = \{a, b, c\}$

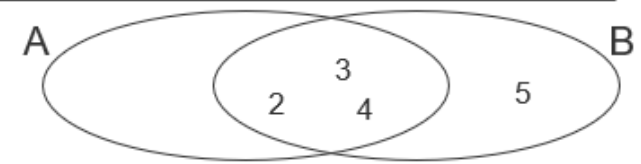
$A \cap B = \{a, b, c\}$



5) $A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{2, 3, 4\}$



6) $A = \{\}$

$B = \{\}$

$A \cap B = \{\}$

7) $A = \{\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cap B = \{\}$

8) $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$A \cap B = \{\}$

1.4 Mengenoperationen – Vereinigungsmenge disjunkter Mengen, Vereinigungsmenge mit Teilmenge

1.4.1 Definition der Vereinigungsmenge

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre****Mengenoperationen – Vereinigungsmenge****Die Vereinigungsmenge**

Zur Erklärung betrachten wir erneut das Beispiel mit den Einrichtungen eines Schlafzimmers S und eines Esszimmers E.

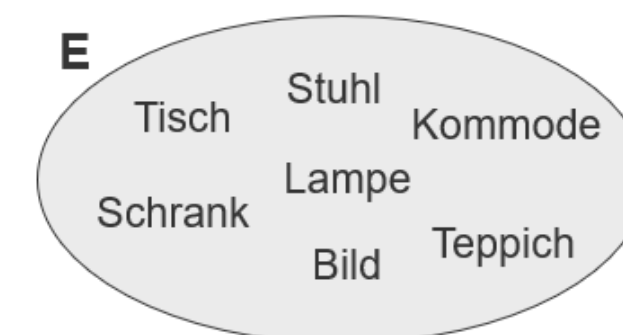
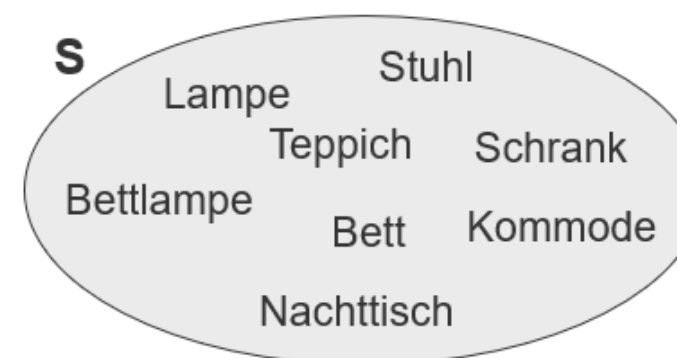
$$S = \{\text{Schrank, Stuhl, Bett, Kommode, Teppich, Nachttisch, Lampe, Bettlampe}\}$$

$$E = \{\text{Tisch, Stuhl, Schrank, Lampe, Bild, Teppich, Kommode}\}$$

Wenn wir nun die Elemente heraussuchen, welche zu S oder E oder zu beiden Mengen gehören, dann erhalten wir die folgende Menge:

$$S \cup E = \{\text{Schrank, Stuhl, Bett, Kommode, Teppich, Nachttisch, Lampe, Bettlampe, Tisch, Bild}\}$$

(gesprochen: S vereinigt mit E =...)

**Definition der Vereinigungsmenge**

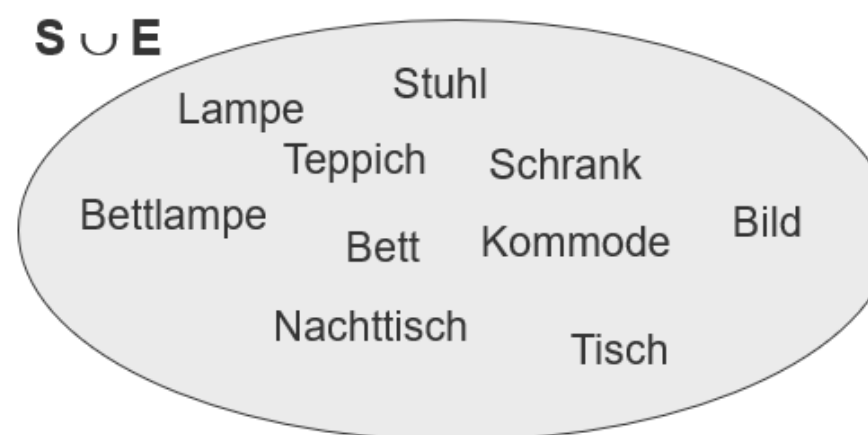
Die Vereinigungsmenge der Mengen A und B ist diejenige Menge, welche alle Elemente enthält, die zu A oder auch zu B gehören.

Man kann auch sagen, dass alle Elemente der Vereinigungsmenge zu A oder zu B gehören.

Also schreiben wir: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

(gesprochen:

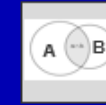
A vereinigt mit B = x mit der Eigenschaft x ist Element von A oder x ist Element von B)



1.4.2 Vereinigungsmenge mit ihrer Teilmenge

Mathematik verstehen 1

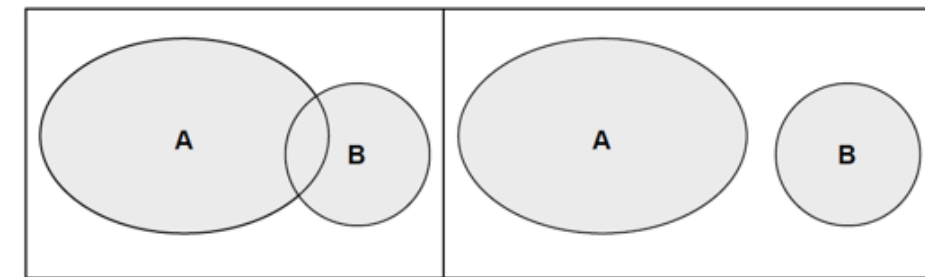
Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Mengenoperationen – Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge enthält also alle Elemente beider beteiligten Mengen, wobei laut Definition kein Element doppelt vorkommen darf. Dies gilt natürlich auch für die Vereinigungsmenge zweier disjunkter Mengen (im Bild rechts dargestellt).

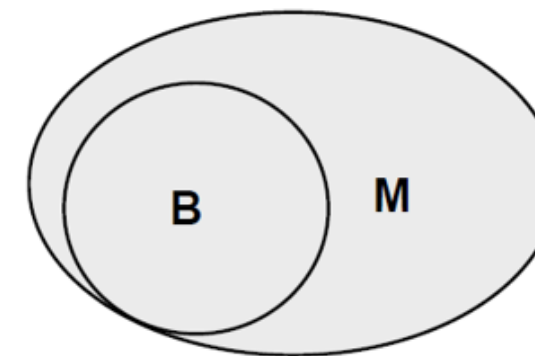


Beispiele für Vereinigungsmengen

Vereinigungsmenge einer Menge mit ihrer Teilmenge

Bildet man die Vereinigungsmenge einer Obermenge M mit ihrer Teilmenge B , so erhält man die Obermenge M .

$$\text{Wenn } B \subset M \Rightarrow B \cup M = M$$

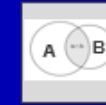


Teilmenge und Vereinigungsmenge

1.4.3 Beispiele für Vereinigungsmengen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Mengenoperationen – Vereinigungsmenge

Beispiele für Vereinigungsmengen

1) $A = \{7, 9, 12, 23\}$

$B = \{1, 2, 7, 11, 23, 45\}$

$A \cup B = \{1, 2, 7, 9, 11, 12, 23, 45\}$

2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x \leq 7\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 4 \leq x < 12\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x < 12\}$

3) $A = \{a, b, k, d, t, i\}$

$B = \{r, z, k, ä\}$

$A \cup B = \{a, b, k, d, t, i, r, z, ä\}$

4) $A = \{a, b, c\}$

$B = \{a, b, c\}$

$A \cup B = \{a, b, c\}$

5) $A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

6) $A = \{\}$

$B = \{\}$

$A \cup B = \{\}$

7) $A = \{\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

8) $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$

1.5 Mengenoperationen – Differenzmenge (Restmenge)

1.5.1 Definition der Differenzmenge (Restmenge)

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre****Mengenoperationen – Differenzmenge (Restmenge)****Die Differenzmenge oder auch Restmenge**

Auch hier verwenden wir wieder unser Beispiel mit den beiden Zimmern:

$S = \{\text{Schrank, Stuhl, Bett, Kommode, Teppich, Nachttisch, Lampe, Bettlampe}\}$

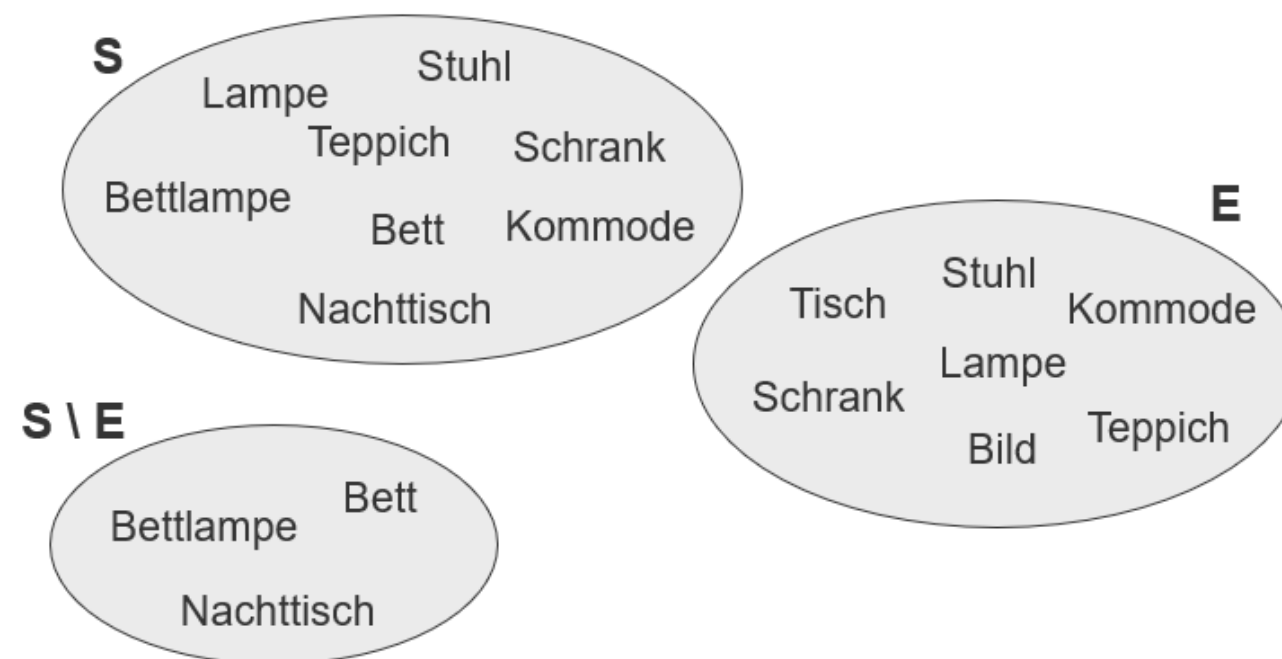
$E = \{\text{Tisch, Stuhl, Schrank, Lampe, Bild, Teppich, Kommode}\}$

Wir fragen uns nun, welche Elemente ausschließlich in S vorkommen.

Also die Elemente von S , abzüglich der Elemente der Menge E .

Wenn wir diese Elemente heraussuchen, erhalten wir:

$S \setminus E = \{\text{Bett, Nachttisch, Bettlampe}\}$ (gesprochen: S ohne $E = \dots$)

**Definition der Differenzmenge oder auch Restmenge**

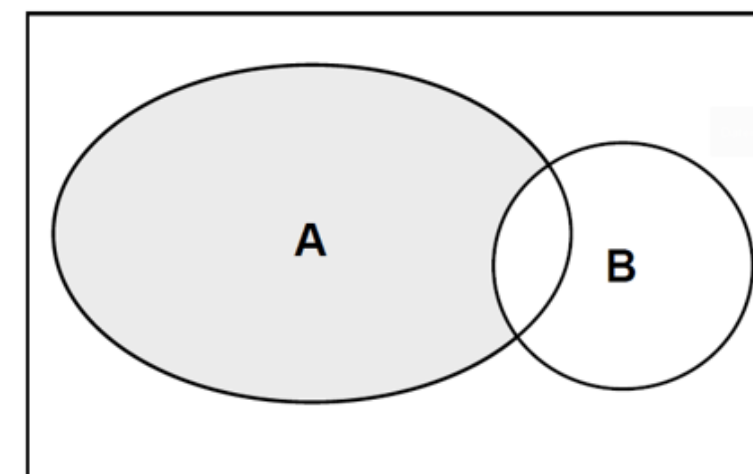
Die Differenzmenge der Mengen A und B ist diejenige Menge, welche alle Elemente enthält, die zu A aber nicht zu B gehören.

Man kann auch sagen, dass die Differenzmenge alle Elemente der Menge A , abzüglich der Menge B enthält.

Also schreiben wir: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

(gesprochen:

A ohne $B = x$ mit der Eigenschaft x ist Element von A und x ist nicht Element von B)

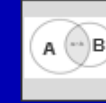


Differenzmenge A ohne B

1.5.2 Beispiele für Differenzmengen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Mengenoperationen – Differenzmenge (Restmenge)

Beispiele für Differenzmengen

1) $A = \{ 7, 9, 12, 23 \}$

$B = \{ 1, 2, 7, 11, 23, 45 \}$

$A \setminus B = \{ 9, 12 \}$

2) $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x \leq 7 \}$

$B = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 4 \leq x < 12 \}$

$A \setminus B = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x < 4 \}$

3) $A = \{ a, b, k, d, t, i \}$

$B = \{ r, z, k, ä \}$

$A \setminus B = \{ a, b, d, t, i \}$

4) $A = \{ a, b, c \}$

$B = \{ a, b, c \}$

$A \setminus B = \{ \}$

5) $A = \{ 2, 3, 4 \}$

$B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

$A \setminus B = \{ \}$

6) $A = \{ \}$

$B = \{ \}$

$A \setminus B = \{ \}$

7) $A = \{ 10, 12, 14, 16 \}$

$B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

$A \setminus B = \{ 12, 14, 16 \}$

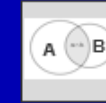
8) $A = \{ 0, 2, 4, 6, \dots \}$

$B = \{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$

$A \setminus B = A$

1.6 Mengenoperationen – Symmetrische Differenz

1.6.1 Definition der symmetrischen Differenz

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre****Mengenoperationen – Symmetrische Differenz****Die symmetrische Differenz**

Noch einmal bemühen wir unser Beispiel mit den beiden Zimmern:

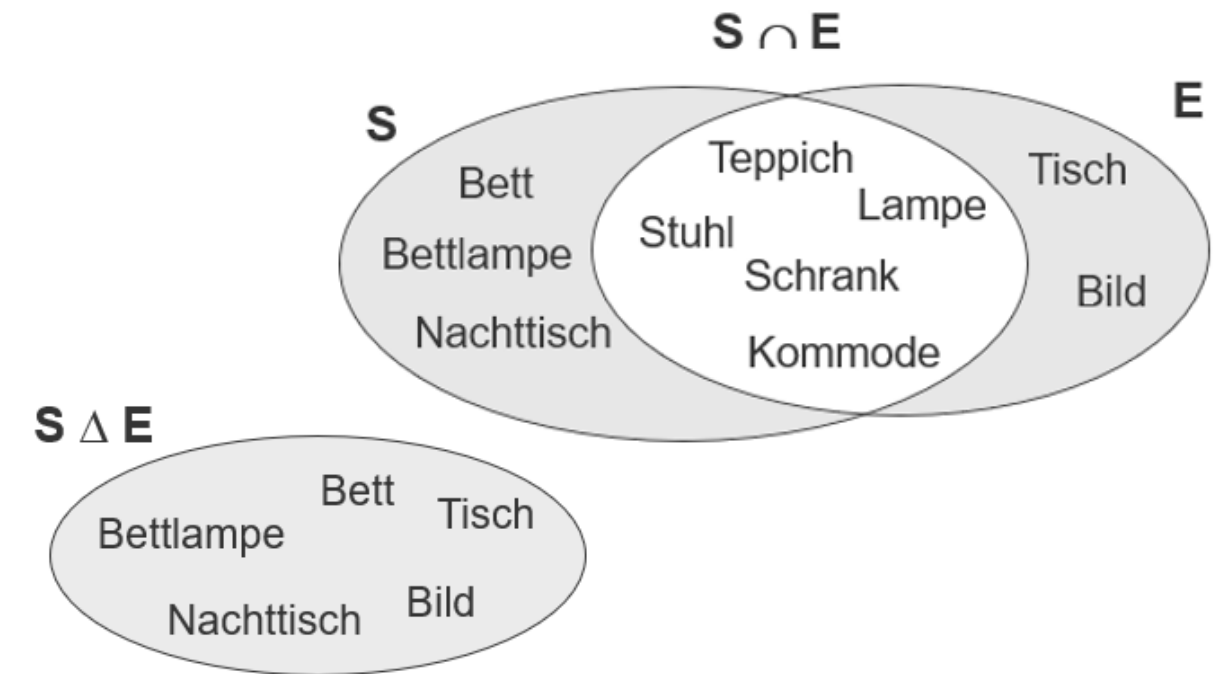
$S = \{\text{Schrank, Stuhl, Bett, Kommode, Teppich, Nachttisch, Lampe, Bettlampe}\}$

$E = \{\text{Tisch, Stuhl, Schrank, Lampe, Bild, Teppich, Kommode}\}$

Wir suchen nun Elemente welche ausschließlich in S vorkommen, aber nicht in E und umgekehrt. Man kann auch die Elemente der Vereinigungsmenge nehmen, abzüglich der Elemente der Schnittmenge.

$S \Delta E = \{\text{Bett, Nachttisch, Bettlampe, Tisch, Bild}\}$

(gesprochen: symmetrische Differenz von S und E =...)

**Definition der symmetrischen Differenz**

Die symmetrische Differenz der Mengen **A** und **B** ist diejenige Menge, welche alle Elemente enthält, die zu **A** und **B** gehören außer den Elementen der Schnittmenge zwischen **A** und **B**.

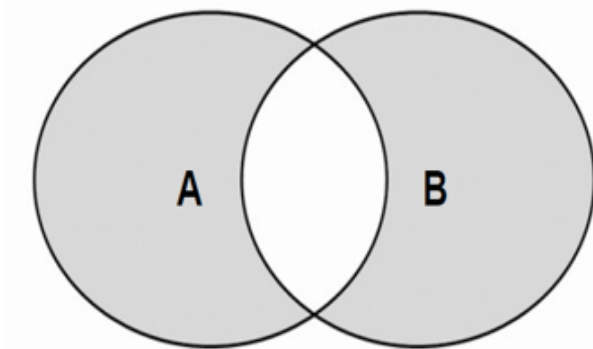
Man kann auch sagen, dass sie alle Elemente der Menge **A**, abzüglich der Elemente der Menge **B** und alle Elemente der Menge **B**, abzüglich der Elemente der Menge **A** umfasst.

Also schreiben wir: $A \Delta B = \{ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \} = \{ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \}$

(gesprochen:

symmetrische Differenz von A und B = (A ohne B) und (B ohne A)

oder = (A vereinigt mit B) ohne (A geschnitten mit B)

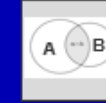


Symmetrische Differenz

1.6.2 Beispiele für symmetrische Differenz

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Mengenoperationen – Symmetrische Differenz

Beispiele für die symmetrische Differenz

$$1) \quad A = \{ 7, 9, 12, 23 \} \quad B = \{ 1, 2, 7, 11, 23, 45 \} \quad A \Delta B = \{ 1, 2, 9, 11, 12, 45 \}$$

$$2) \quad A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 < x \leq 7 \} \quad B = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 4 \leq x < 12 \} \quad A \Delta B = \{ 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11 \}$$

$$3) \quad A = \{ a, b, k, d, t, i \} \quad B = \{ r, z, k, ä \} \quad A \Delta B = \{ a, b, d, t, i, r, z, ä \}$$

$$4) \quad A = \{ a, b, c \} \quad B = \{ a, b, c \} \quad A \Delta B = \{ \}$$

$$5) \quad A = \{ 2, 3, 4 \} \quad B = \{ 2, 3, 4, 5 \} \quad A \Delta B = \{ 5 \}$$

$$6) \quad A = \{ \} \quad B = \{ \} \quad A \Delta B = \{ \}$$

$$7) \quad A = \{ 10, 12, 14, 16 \} \quad B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \} \quad A \Delta B = \{ 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16 \}$$

$$8) \quad A = \{ 0, 2, 4, 6, \dots \} \quad B = \{ 1, 3, 5, 7, \dots \} \quad A \Delta B = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \}$$

1.7 Mengenlehre – Zusammenfassung und Schreibweisen von Mengen

1.7.1 Definition des Mengenbegriffs und Mächtigkeit von Mengen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Mengenlehre

Zusammenfassung

Zusammenfassung Mengenlehre**Definition des Mengenbegriffs nach Cantor**

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Mächtigkeit von Mengen

Dies ist die Anzahl der Elemente einer Menge. Bezeichnen wir eine Menge mit M , so schreibt man ihre Mächtigkeit wie folgt: $|M|$

Die Mächtigkeit von endlichen Mengen kann man durch Abzählen ermitteln. Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen besitzen. Man schreibt

$$|A| = |B|$$

Neben den endlichen Mengen gibt es die unendlichen Mengen, wie z.B. die Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Die Mächtigkeit dieser Menge ist abzählbar unendlich. Man schreibt: $|\mathbb{N}| = \infty$

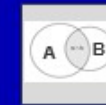
Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn man jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuordnen kann.

Es gilt z.B.: Mächtigkeit natürlicher Zahlen $|\mathbb{N}|$ = Mächtigkeit ganzer Zahlen $|\mathbb{Z}|$ = Mächtigkeit rationaler Zahlen $|\mathbb{Q}|$

Die Mächtigkeit der Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (reelle Zahlen ohne rationale Zahlen) ist überabzählbar unendlich.

Dasselbe gilt für die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

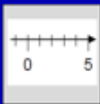
1.7.2 Schreibweise von Mengen und tabellarische Übersicht

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Mengenlehre**
Zusammenfassung**Schreibweisen von Mengen (Notation)****Aufzählende Notation:**
 $M = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ Menge M mit Elementen e_1 bis e_n
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
Beschreibende Notation:
 $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ mit } 3 < x < 6\}$ $M = x \mid x \text{ ist natürliche Zahl aus } \mathbb{N} \text{ mit } 3 < x < 6 = \{4, 5\}$
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ mit } -2 < x < 3\}$ $A = x \mid x \text{ ist ganze Zahl aus } \mathbb{Z} \text{ mit } -2 \leq x < 3 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 $\mathbb{I} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$ Irrationalzahl, x ist Element von $\mathbb{R}$ und kein Element von $\mathbb{Q}$

Bezeichnung	Notation	Gesprochen	Beschreibung	Skizze
Teilmenge	$B \subset M$	B ist Teilmenge von M	Jedes Element von B ist auch in M enthalten.	
Obermenge	$M \supset B$	M ist Obermenge von B	s.o.	s.o.
Nicht Teilmenge	$B \not\subset M$	B ist nicht Teilmenge von M	Nicht jedes Element von B ist auch in M enthalten.	
Gleichheit von Mengen	$A = B$	A gleich B	A ist Teilmenge von B und B ist Teilmenge von A	
Ungleichheit von Mengen	$A \neq B$	A ungleich B		
Mengenoperatoren	$\cap$ $\cup$ $\setminus$ Δ	Durchschnitt Vereinigung Differenz Symmetrische Differenz		

Bezeichnung	Notation	Gesprochen	Beschreibung	Skizze
Schnittmenge	$A \cap B$	A geschnitten mit B	Enthält alle Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören	
Schnittmenge einer Menge mit ihrer Teilmenge	Wenn $B \subset M \Rightarrow B \cap M = B$	Wenn B Teilmenge von M, dann folgt: B geschnitten mit M = B		
Differenzmenge oder Restmenge	$M \setminus B$	M ohne B	Die Differenzmenge von M und B enthält alle Elemente die zu M aber nicht zu B gehören	
Symmetrische Differenz	$A \Delta B$	Symmetrische Differenz von A und B $= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ oder $= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	Die Menge, zu der alle Elemente von A und B gehören, außer den Elementen der Schnittmenge von A und B.	

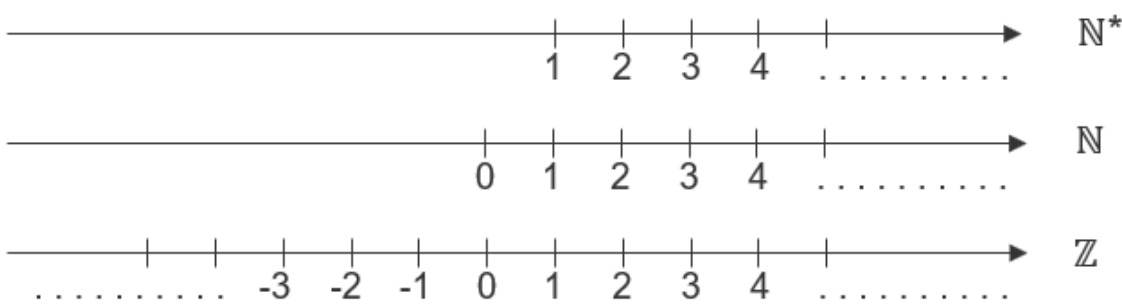
Mathematik verstehen 1
Von den Grundlagen bis zum Integral



Zahlenmengen

Menge der positiven ganzen Zahlen	$\mathbb{N}^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$
Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Darstellung auf der Zahlengeraden



Mit Hilfe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ können wir bereits eine ganze Reihe von Rechenoperationen durchführen, z.B.:

Die letzte Rechenoperation können wir nicht durchführen, weil die Berechnung nicht glatt aufgeht. Geben wir die Zahlen in den Taschenrechner ein, dann erhalten wir:

Addition:	$2 + 3 = 5$	$25 + 11 = 36$	
Subtraktion:	$4 - 2 = 2$	$3 - 10 = -7$	
Multiplikation:	$2 \cdot 3 = 6$	$6 \cdot 8 = 48$	
Division:	$8 : 2 = 4$	$22 : 11 = 2$	$17 : 3 = ?$

$17 : 3 = 5,66666\dots$ Dies ist eine rationale Zahl, deren Menge mit dem Zeichen $\mathbb{Q}$ benannt wird.

Definition der rationalen Zahlen:

Zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gehören alle Zahlen $x = a : b$ oder auch $x = \frac{a}{b}$ mit folgenden Eigenschaften von a und b:

a ist Element der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$ und b ist Element der Menge der positiven ganzen Zahlen $\mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$

Die Zahl a oberhalb des Bruchstrichs nennt man Zähler und die Zahl b unterhalb des Bruchstrichs nennt man Nenner.
In der Divisionsschreibweise nennt man die Zahl vor dem Doppelpunkt Dividend und die Zahl dahinter Divisor.

Beispiele für rationale Zahlen: $3 \mid \frac{1}{2} = 0,5 \mid -7 \mid \frac{-27}{18} = -1,5 \mid \frac{13}{11} = 1,1818\dots \mid \frac{-5}{13} = -0,384615384615\dots$

2.1.1.2 Irrationale Zahlen – Menge der reellen Zahlen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Zahlensysteme - Zahlenmengen, Zahlengerade, Eigenschaften

Irrationale Zahlen:

Wir haben bereits einige Zahlenmengen kennen gelernt und fragen und nun ob damit alle Zahlen abgebildet werden können.

Die Antwort ist ein klares Nein. Es kann sogar gezeigt werden, dass zwischen zwei beliebig dicht beieinander liegenden rationalen Zahlen eine unendliche Menge von weiteren Zahlen existiert, welche Irrationalzahlen genannt werden.

Beispiel: Gesucht ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt!

Das hört sich zunächst einfach an. Wenn wir jedoch versuchen die Zahl zu finden, stoßen wir schnell an unsere Grenzen. Sooft wir auch probieren, es gelingt uns nicht, eine exakte Zahl für dieses Problem zu benennen. Dies liegt natürlich daran, dass es für dieses Problem überhaupt keine exakte Zahl gibt

Geben wir das Problem in ein Computerprogramm ein, so erhalten wir: $\sqrt{2} = 1,4142135623731...$

Definition von irrationalen Zahlen:

Eine Zahl ist irrational, wenn sie nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann.

Sie kann nicht als p / q mit $p, q \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. Als Zeichen für Irrationalzahl wird häufig das $\mathbb{I}$ verwendet.

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

Wird die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ vereinigt, dann erhalten wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Es gilt: „Zu der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gehören alle Zahlen der Zahlengeraden“

Die Menge der irrationalen Zahlen kann wie folgt geschrieben: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

gesprochen: Menge der Irrationalzahlen $\mathbb{I}$ = Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ohne die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

2.1.1.3 Übersicht über die Zahlenmengen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Arithmetik und Algebra

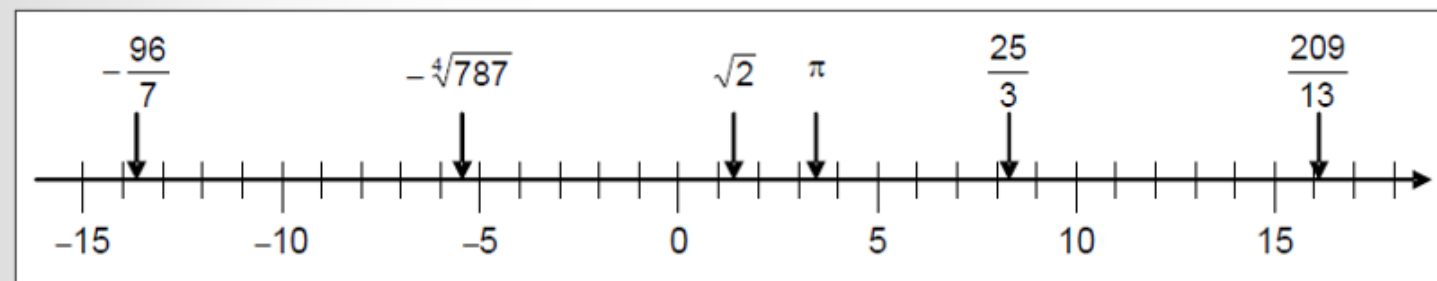
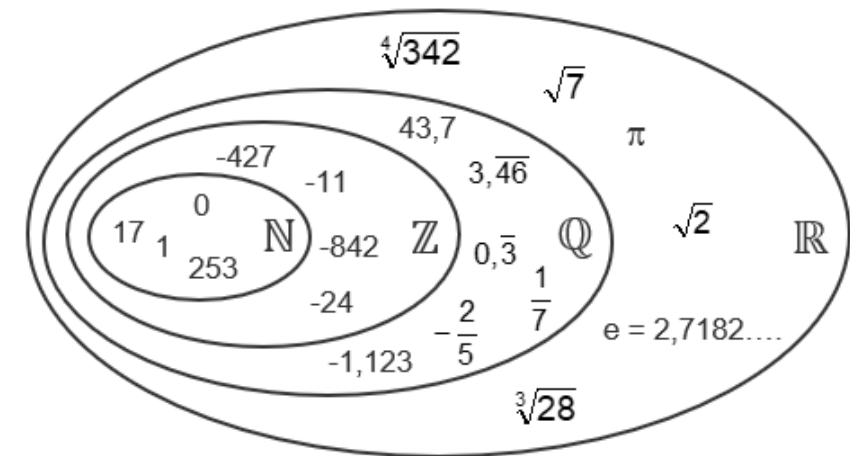
Zahlensysteme - Zahlenmengen, Zahlengerade, Eigenschaften

Übersicht Zahlenmengen

Mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erhalten wir alle Zahlen der Zahlengeraden. In der folgenden Tabelle sehen wir eine Zusammenstellung aller bisher behandelten Zahlenmengen.

Standardmengen von Zahlen		
$\mathbb{N}^*$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	Menge der positiven ganzen Zahlen
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	$\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$\left\{ q \mid q = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N} \right\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	z.B.: $\sqrt{2}, -\sqrt[4]{7}, \sin(13^\circ), \ln(3), \pi, \dots$	Menge der irrationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge aller Punkte der Zahlengeraden	Menge der reellen Zahlen

Nach DIN 5473 werden Standardmengen mit Stern gekennzeichnet, wenn die Null nicht in der Menge enthalten sein soll.

Die Zahlengerade**Zahlenmengen im Mengendiagramm****Hinweis**

Mit den reellen Zahlen haben wir noch nicht alle Zahlen die es gibt aufgeführt. Darüber hinaus gibt es noch die komplexen Zahlen, welche sich aus den reellen und den imaginären Zahlen zusammensetzen. Diese werden zu einem späteren Zeitpunkt behandelt.

2.1.2 Primzahlen und Primfaktoren

2.1.2.1 Definition von Primzahlen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral**

Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Zahlensysteme – Primzahlen und Primfaktoren

Definition von Primzahlen

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $n > 1$, welche nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilbar ist.

Wir kennen die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots \}$

Erfüllt die Zahl $n = 6$ die Bedingungen für eine Primzahl?	1. Bedingung	$n > 1$	$6 > 1$	erfüllt
	2. Bedingung	n ist durch 1 teilbar	$6 : 1 = 6$	erfüllt
	3. Bedingung	n ist durch sich selbst teilbar	$6 : 6 = 1$	erfüllt

Diese 3 Bedingungen werden von allen natürlichen Zahlen > 1 erfüllt.

Wir müssen also nur noch untersuchen, ob die gewählte Zahl durch andere Zahlen ohne Rest teilbar ist.

Für die Zahl 6 gilt: $6 : 2 = 3$ und $6 : 3 = 2$ Die Zahl 6 ist also auch durch 2 und 3 teilbar und somit keine Primzahl.

Erfüllt die Zahl $n = 5$ die Bedingungen für eine Primzahl? Wir dividieren Probehälter durch die kleinste Primzahl, also: $5 : 2 = 2,5$
 Da die nächst größere Primzahl 3 multipliziert mit 2 bereits 6 ergibt, kann es keine weitere Division geben, die ohne Rest aufgeht. $\Rightarrow$ Die Zahl 5 ist eine Primzahl.

Prinzipiell können wir alle geraden Zahlen > 2 ausschließen, weil diese durch 2 teilbar sind.

Somit erhalten wir die Menge der Primzahlen wie folgt: $\mathbb{P} = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, \dots \}$

Die Mächtigkeit der Menge der Primzahlen ist unendlich: $|\mathbb{P}| = \infty$

2.1.2.2 Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral**

Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Zahlensysteme – Primzahlen und Primfaktoren

Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren

Jede natürliche Zahl n größer 1 lässt sich als Produkt von Primfaktoren darstellen.
Ist die Zahl n selbst eine Primzahl, dann ist sie selbst ihr einziger Primfaktor.

Beispiele für die Zerlegung durch Probedivision

Gegeben: $n = 1512$ Schritt 1: $n = 2 \cdot 756$ Schritt 2: $n = 2 \cdot 2 \cdot 378$ Schritt 3: $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 189$ Schritt 4: $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 63$ Schritt 5: $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 21$ Schritt 6: $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ Gegeben: $n = 561$ Schritt 1: $561 : 2 = 280,5$ Schritt 2: $561 : 3 = 187 \Rightarrow n = 3 \cdot 187$ Schritt 3: $187 : 3 = 62,33\dots$ Schritt 4: $187 : 5 = 37,4$ Schritt 5: $187 : 7 = 26,71\dots$ Schritt 6: $187 : 11 = 17 \Rightarrow n = 3 \cdot 11 \cdot 17$ Tabelle der natürlichen Zahlen n und deren Primfaktoren.

Zahl n	Prim-faktoren	Zahl n	Prim-faktoren	Zahl n	Prim-faktoren	Zahl n	Prim-faktoren
1	keiner	6	$2 \cdot 3$	11	11	16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
2	2	7	7	12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	17	17
3	3	8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	13	13	18	$2 \cdot 3 \cdot 3$
4	$2 \cdot 2$	9	$3 \cdot 3$	14	$2 \cdot 7$	19	19
5	5	10	$2 \cdot 5$	15	$3 \cdot 5$	20	$2 \cdot 2 \cdot 5$

Prinzipielle Vorgehensweise bei der Zerlegung durch Probedivision :Die natürliche Zahl n wird Probehalber durch die kleinste Primzahl 2 dividiert

Fall 1: Die Division geht ganzzahlig auf

Wir erhalten $n = 2 \cdot \text{Rest}$ Mit dem Rest wird nun genauso verfahren wie mit dem ursprünglichen n

Fall 2: Die Division geht nicht ganzzahlig auf

n wird Probehalber durch die nächst größere Primzahl dividiert. Dies wird solange wiederholt, bis die Division ganzzahlig aufgeht. Danach wird mit dem Rest weitergemacht.

2.1.3 Größter gemeinsamer Teiler

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Zahlensysteme – Größter gemeinsamer Teiler****Größter gemeinsamer Teiler (ggT)**

Der größte gemeinsame Teiler zweier oder mehrerer Zahlen ist die größte Zahl, durch die diese Zahlen ganzzahlig teilbar sind.

Wir wollen dies anhand einiger Beispiele verdeutlichen:

Gesucht ist der ggT der Zahlen 8 und 12

8 ist teilbar durch 1, 2, $\downarrow$ 4 und 8

12 ist teilbar durch 1, 2, 3, $\downarrow$ 4, 6 und 12

$\Rightarrow$ ggT = 4

Gesucht ist der ggT der Zahlen 32 und 28

32 ist teilbar durch 1, 2, $\downarrow$ 4, 8, 16 und 32

28 ist teilbar durch 1, 2, $\downarrow$ 4, 7, 14 und 28

$\Rightarrow$ ggT = 4

Regel für die Ermittlung des ggT

Man zerlegt jede Zahl in ihre Primfaktoren und bildet das Produkt der Primfaktoren, die bei allen Zahlen übereinstimmen.

Gesucht: ggT von 660, 1512 und 180

Nutzen wir die Potenzschreibweise

$\Rightarrow$

So können wir auch schreiben;

$$660 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$1 = 2^0; 2 = 2^1; 2 \cdot 2 = 2^2; 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \dots$$

$$660 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1$$

$$1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$1 = 3^0; 3 = 3^1; 3 \cdot 3 = 3^2; 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 \dots$$

$$1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0$$

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1 = n^0; a = a^1; a \cdot a = a^2; \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}} = a^n$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0$$

$$\text{ggT} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{ggT} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 12$$

Weitere Beispiele

Gesucht: ggT von 11616, 5544 und 539055

Gesucht: ggT von 14700, 27720 und 1417500

Gesucht: ggT von 7260, 15876 und 29106

$$11616 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^2$$

$$14700 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^0$$

$$7260 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^2$$

$$5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1$$

$$27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1$$

$$15876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^0$$

$$539055 = 2^0 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^3$$

$$1417500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^1 \cdot 11^0$$

$$29106 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^2 \cdot 11^1$$

$$\text{ggT} = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = 3 \cdot 11 = 33$$

$$\text{ggT} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

$$\text{ggT} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 2 \cdot 3 = 6$$

2.1.4 Das kleinste gemeinsame Vielfache

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral**

Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Zahlensysteme – Das kleinste gemeinsame Vielfache

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen ist die kleinste Zahl, die sowohl ein ganzzahliges Vielfaches der ersten Zahl, als auch ein ganzzahliges Vielfaches der restlichen Zahlen ist. Wir wollen dies anhand von Beispielen verdeutlichen:

Gesucht kgV von 18 und 32

Vielfache von 18: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252, 270, 288, 306, ...

Vielfache von 32: 32, 64, 96, 128, 160, 192, 224, 256, 288, 320, 352, 384, 416, 448, 480, 512, 544, ...

⇒ kgV von 18 und 32 = 288

Gesucht kgV von 7 und 12

Vielfache von 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, ...

Vielfache von 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...

⇒ kgV von 7 und 12 = 84

Hinweis:

Es ist kein Zufall, dass dies genau das Produkt der beiden Zahlen ist. Der Grund dafür liegt darin, dass die 7 eine Primzahl ist und deshalb keine weiteren Teiler außer 1 und 7 hat.

Regel für die Ermittlung des kgV

Man zerlegt jede Zahl in ihre Primfaktoren und bildet das Produkt aller auftretenden Primfaktoren

Am Beispiel 18 und 32 probieren wir dies aus:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 288$$

In Potenzschreibweise

$$18 = 2^1 \cdot 3^2$$

$$32 = 2^5 \cdot 3^1$$

$$\text{kgV} = 2^5 \cdot 3^2 = 288$$

Weitere Beispiele

kgV von 50, 48 und 49

$$50 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^0$$

$$48 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0$$

$$49 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^2$$

$$\text{kgV} = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 58800$$

kgV von 2450, 72 und 1372

$$2450 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0$$

$$1372 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^3$$

$$\text{kgV} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 617400$$

kgV von 180, 378 und 1890

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$$

$$378 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$

$$1890 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

$$\text{kgV} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 3780$$

2.1.5 Das Dezimalsystem

2.1.5.1 Dezimalsystem in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ **Mathematik verstehen 1****Von den Grundlagen bis zum Integral**

Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Zahlensysteme – Das Dezimalsystem

Das Dezimalsystem

Wenn wir heute jemanden auffordern zu zählen, dann wird folgendes dabei herauskommen: 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ..., 18, 19, 20, ..., 98, 99, 100, ...

Wir betrachten zunächst ein einfaches Rechenbeispiel: Es sollen die Zahlen 1849 und 2124 addiert werden.

Ein geübter Rechner wird schon nach wenigen Sekunden das Ergebnis verkünden: $1849 + 2124 = 3973$

Wir fragen uns natürlich, wie konnte der geübte Rechner das Ergebnis so schnell finden?

Nun er hat die Tausender, die Hunderter, die Zehner und die Einer jeweils addiert und das Ergebnis in vier einfachen Rechenschritten erhalten:

1 Tausender + 2 Tausender = 3 Tausender 8 Hunderter + 1 Hunderter = 9 Hunderter 4 Zehner + 2 Zehner = 6 Zehner 9 Einer + 4 Einer = 1 Zehner + 3 Einer

Eine Ziffer innerhalb einer Dezimalzahl steht also nicht allein für ihren Ziffernwert, sondern die Stellung innerhalb der Zahl teilt dieser einen entsprechenden Wert zu.

Betrachten wir einmal die Stellungen der Ziffer 4 und deren Wertigkeit in folgenden Beispielen:

3214 $\Rightarrow$ 4 Einer 6541 $\Rightarrow$ 4 Zehner 9412 $\Rightarrow$ 4 Hunderter 34127 $\Rightarrow$ 4 Tausender 847962 $\Rightarrow$ 4 Zehntausender 3497235 $\Rightarrow$ 4 Hunderttausender

Die Wertigkeit der Ziffern nimmt von rechts nach links je Stelle um den Faktor 10 zu. Deshalb heißt dies auch Zehner- oder Dezimalsystem (von lateinisch decem = zehn), wobei die Zehn Basis oder auch Grundzahl des Systems genannt wird.

Wir erinnern uns an die Potenzen aus den vorherigen Videos, z.B.: $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ mit a = Basis und Hochzahl = Exponent.

Wir schreiben einige Potenzen der Basis 10: $10^4 = 10000 = 10$ Tausend $10^3 = 1000 = 1$ Tausend $10^2 = 100 = 1$ Hundert $10^1 = 10 = \text{Zehn}$ $10^0 = 1$

Nun wollen wir mit unserer neuen Schreibweise eine Zahl schreiben, z.B.: $29.340.901 = 2 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Die Anordnung der Ziffern an einer bestimmten Stelle der Zahl gibt den sogenannten Stellenwert wieder. Wenn also die Ziffer 9 an der dritten Stelle von rechts steht, ist der Stellenwert der Ziffer = 900. Aus diesem Grund nennt man ein derartiges System auch „Stellenwertsystem“.

2.1.5.2 Dezimalsystem in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Arithmetik und Algebra
Zahlensysteme – Das Dezimalsystem

Das Dezimalsystem

Bei der Beschreibung des Dezimalsystems haben wir uns bis jetzt jedoch auf die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beschränkt. Wollen wir den Zahlenraum um die negativen Zahlen erweitern, dann müssen wir lediglich ein negatives Vorzeichen (Minuszeichen) vor den Zahlen zulassen.

Eine negative Zahl kann man also wie folgt schreiben: $-21.507 = -(2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0)$

Wir klammern die addierten Werte und schreiben ein Minuszeichen davor. Das negative Vorzeichen ist gleichzusetzen mit einer Multiplikation mit -1 .

Führen wir diese Multiplikation aus, dann erhalten wir folgendes:

$$-21.507 = -1 \cdot (2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) = -2 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 - 0 \cdot 10^1 - 7 \cdot 10^0$$

Jetzt fehlt noch der Schritt zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, mit der alle Zahlen der Zahlengeraden darstellt werden können. Schreiben wir einmal eine rationale Zahl auf, von der wir ja wissen, dass sie zu der Menge der reellen Zahlen gehört:

$$3474689:10000 = 347,4689$$

Wir versuchen nun diese Zahl mit Hilfe unserer Potenzschreibweise darzustellen:

$$347,4689 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + ?$$

Die Ziffern hinter dem Komma können als Dezimalbruch geschrieben werden: 1. Stelle $\frac{4}{10} = 4 \cdot \frac{1}{10}$ 2. Stelle $\frac{6}{100} = 6 \cdot \frac{1}{100}$

Damit können wir die Zahl hinter dem Komma wie folgt schreiben: $0,4689 = 4 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot \frac{1}{1000} + 9 \cdot \frac{1}{10000} = 4 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 8 \cdot \frac{1}{10^3} + 9 \cdot \frac{1}{10^4}$

Im Vorgriff auf die Potenzrechnung gilt folgendes: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ und damit auch: $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$

Jetzt können wir die Zahl vollständig aufschreiben: $347,4689 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4}$

Dies gilt natürlich auch für die unendlich periodischen Brüche: $\frac{5}{3} = 1,666... = 1 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + ...$

sowie für die Irrationalzahlen, zum Beispiel:

$$\sqrt{5} = 2,236... = 2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + ...$$

Somit können wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ im Dezimalsystem vollständig darstellen.

2.1.6 Allgemeine Zahlensysteme

2.1.6.1 Gegenüberstellung der Systeme

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Zahlensysteme – Allgemeine Zahlensysteme****Allgemeine Zahlensysteme**

Neben dem Dezimalsystem gibt es eine unendliche Anzahl von Zahlensystemen, weil jede ganze Zahl größer 1 als Basis für ein Zahlensystem verwendet werden kann. Von Bedeutung sind noch das Dualsystem (Basis 2), das Oktalsystem (Basis 8) und das Hexadezimalsystem (Basis 16) in der Rechnertechnik oder Informatik. Auch das Duodezimalsystem (Basis 12) hat eine historische Bedeutung. Im Folgenden werden wir uns kurz mit diesen Zahlensystemen beschäftigen.

Gegenüberstellung der Systeme				
Dezimalzahl	Dualzahl	Oktalzahl	Hexadezimalzahl	Duodezimalzahl
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	3	3	3
4	100	4	4	4
5	101	5	5	5
6	110	6	6	6
7	111	7	7	7
8	1000	10	8	8
9	1001	11	9	9
10	1010	12	A	A
11	1011	13	B	B
12	1100	14	C	10
13	1101	15	D	11
14	1110	16	E	12
15	1111	17	F	13
16	10000	20	10	14

Beispiele für Umrechnungen	
Umrechnung Dezimalzahl – Dualzahl 1) Wir dividieren die Zahl durch 2 mit Rest 2) Der Divisionsrest ist die erste Ziffer (Einer) 3) Wir nehmen den ganzzahligen Anteil und dividieren diesen erneut durch 2 mit Rest 4) Der Divisionsrest ist die nächste Ziffer (von rechts) Die Schritte 3 und 4 werden solange wiederholt bis der ganzzahlige Quotient = 0 ist. $18_{(10)} = 10010_{(2)}$ Rechnung $18 : 2 = 9 \text{ Rest } 0$ $9 : 2 = 4 \text{ Rest } 1$ $4 : 2 = 2 \text{ Rest } 0$ $2 : 2 = 1 \text{ Rest } 0$ $1 : 2 = 0 \text{ Rest } 1$ $23_{(10)} = 10111_{(2)}$ Rechnung $23 : 2 = 11 \text{ Rest } 1$ $11 : 2 = 5 \text{ Rest } 1$ $5 : 2 = 2 \text{ Rest } 1$ $2 : 2 = 1 \text{ Rest } 0$ $1 : 2 = 0 \text{ Rest } 1$	Umrechnung Dualzahl – Dezimalzahl 1) Die erste Stelle (Einer) wird mit 2^0 multipliziert 2) Die nächste Stelle (von rechts) wird mit 2^1 multipliziert 3) Die nächsten Stellen (von rechts) werden mit 2 hoch dem jeweils um 1 erhöhten Exponenten multipliziert 4) Die Ergebnisse der Produkte werden addiert $10101_{(2)} = 21_{(10)}$ Rechnung $1 \cdot 2^0 = 1$ $0 \cdot 2^1 = 0$ $1 \cdot 2^2 = 4$ $0 \cdot 2^3 = 0$ $1 \cdot 2^4 = 16$ $1 + 0 + 4 + 0 + 16 = 21$ $11001_{(2)} = 25_{(10)}$ Rechnung $1 \cdot 2^0 = 1$ $0 \cdot 2^1 = 0$ $0 \cdot 2^2 = 0$ $1 \cdot 2^3 = 8$ $1 \cdot 2^4 = 16$ $1 + 0 + 0 + 8 + 16 = 25$

2.1.6.2 Umrechnungen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Zahlensysteme – Allgemeine Zahlensysteme**

Umrechnung Dualzahl – Oktalzahl	Umrechnung Oktalzahl – Dualzahl	Umrechnung Dezimalzahl – Oktalzahl	Umrechnung Oktalzahl – Dezimalzahl
1) Die Ziffern der Dualzahl werden zu Dreierblöcken sortiert, wobei bei der kleinsten Stelle (Einer) begonnen wird. 2) Ergibt sich bei der höchsten Stelle kein vollständiger Dreierblock, dann wird mit führenden Nullen aufgefüllt. 3) Für jede Dreiergruppe schreiben wir nun die zugehörige Oktalzahl. 000 = 0; 001 = 1; 010 = 2; 011 = 3; 100 = 4; 101 = 5; 110 = 6; 111 = 7	Jede Ziffer der Oktalzahl wird durch ein entsprechendes Dreierpaket der Dualzahl ersetzt. 0 = 000; 1 = 001; 2 = 010; 3 = 011; 4 = 100; 5 = 101; 6 = 110; 7 = 111	1) Wir dividieren die Zahl durch 8 mit Rest 2) Der Divisionsrest ist die erste Ziffer 3) Den ganzzahligen Anteil dividieren wir erneut durch 8 mit Rest 4) Der Rest ist die nächste Ziffer (von rechts) Wiederholung der Schritte 3 und 4 bis der ganzzahlige Quotient = 0 ist.	1) Die erste Stelle (Einer) wird mit 8^0 multipliziert 2) Die nächste Stelle (von rechts) wird mit 8^1 multipliziert 3) Die nächsten Stellen (von rechts) werden mit 8 hoch dem jeweils um 1 erhöhten Exponenten multipliziert 4) Die Ergebnisse der Produkte werden addiert
$1110101001010_{(2)} = 16512_{(8)}$ Bildung von Dreierblöcken 001 110 101 001 010 1 6 5 1 2	$24051_{(8)} = 10100000101001_{(2)}$ Zuordnung von Dreierblöcken 2 4 0 5 1 010 100 000 101 001	$23704_{(10)} = 56230_{(8)}$ Rechnung $23704 : 8 = 2963 \text{ Rest } 0$ $2963 : 8 = 370 \text{ Rest } 3$ $370 : 8 = 46 \text{ Rest } 2$ $46 : 8 = 5 \text{ Rest } 6$ $5 : 8 = 0 \text{ Rest } 5$	$72036_{(8)} = 29726_{(10)}$ Rechnung $6 \cdot 8^0 = 6$ $3 \cdot 8^1 = 24$ $0 \cdot 8^2 = 0$ $2 \cdot 8^3 = 1024$ $7 \cdot 8^4 = 28672$ $6 + 24 + 0 + 1024 + 28672 = 29726$
$1101001000010_{(2)} = 15102_{(8)}$ Bildung von Dreierblöcken 001 101 001 000 010 1 5 1 0 2	$13705_{(8)} = 1011111000101_{(2)}$ Zuordnung von Dreierblöcken 1 3 7 0 5 001 011 111 000 101	$37042_{(10)} = 110262_{(8)}$ Rechnung $37042 : 8 = 4630 \text{ Rest } 2$ $4630 : 8 = 578 \text{ Rest } 6$ $578 : 8 = 72 \text{ Rest } 2$ $72 : 8 = 9 \text{ Rest } 0$ $9 : 8 = 1 \text{ Rest } 1$ $1 : 8 = 0 \text{ Rest } 1$	$3206_{(8)} = 1670_{(10)}$ Rechnung $6 \cdot 8^0 = 6$ $0 \cdot 8^1 = 0$ $2 \cdot 8^2 = 128$ $3 \cdot 8^3 = 1536$ $6 + 0 + 128 + 1536 = 1670$
$11101111000010_{(2)} = 35702_{(8)}$ Bildung von Dreierblöcken 011 101 111 000 010 3 5 7 0 2	$32607_{(8)} = 11010110000111_{(2)}$ Zuordnung von Dreierblöcken 3 2 6 0 7 011 010 110 000 111		

2.2 Rechnen mit reellen Zahlen
 2.2.1 Addition und Subtraktion
 2.2.1.1 Die Addition

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Rechnen mit reellen Zahlen – Addition und Subtraktion

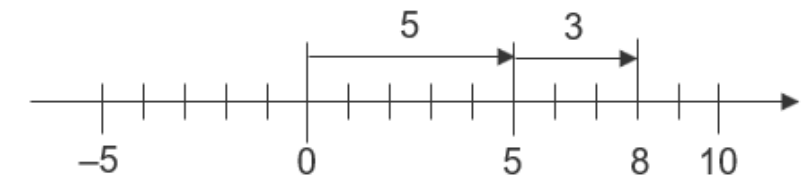
Die Addition

Addition und Subtraktion gehören zu den vier Grundrechenarten. Wir wollen die Addition als eine Verschiebung auf der Zahlengeraden einführen.

Hierzu betrachten wir eine beliebige Zahl, z.B. die 5. Wir kommen zu dieser Zahl, indem wir vom Ursprung 0 der Zahlengeraden 5 Einheiten nach rechts rücken. Man kann also die Zahl als eine Addition von $0 + 5 = 5$ auffassen.

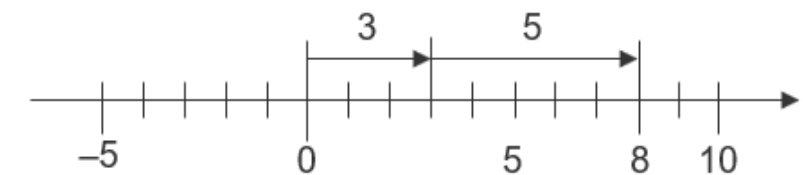


Wenn wir nun hierzu eine weitere Zahl, z.B. die 3 addieren, dann können wir eine weitere Verschiebung einzeichnen. Es gilt dann $0 + 5 + 3 = 5 + 3 = 8$.



Wir fassen also jede positive Zahl innerhalb einer Addition als Anweisung auf, von der aktuellen Position auf dem Zahlenstrahl eine entsprechende Anzahl von Einheiten nach rechts zu gehen. Die erste Zahl innerhalb einer Addition gilt als Anweisung, vom Nullpunkt aus eine entsprechende Anzahl von Einheiten nach rechts zu gehen.

Wenn wir die beiden Zahlen unseres Beispiels vertauschen, dann erhalten wir $3 + 5 = 8$. Man kann also die Reihenfolge der Rechenschritte einer Addition vertauschen (**Vertauschungsgesetz** oder **Kommutativgesetz** der Addition).



Das gilt natürlich auch bei mehr als zwei Zahlen im Rahmen einer Addition – oder auch bei mehr als 2 Summanden, wie die Elemente einer Addition bezeichnet werden:

$$34 + 33 + 11 + 9 + 2 = 11 + 34 + 2 + 33 + 9 = 89$$

Auch wenn wir Klammern setzen und die Additionen innerhalb der Klammern zuerst und die restlichen Additionen zuletzt ausführen, ändert dies am Ergebnis nichts (**Verbindungsgesetz** oder **Assoziativgesetz** der Addition).

$$(34 + 33) + 11 + (9 + 2) = 67 + 11 + 11 = 89$$

oder

$$34 + (33 + 11 + 9) + 2 = 34 + 53 + 2 = 89$$

2.2.1.2 Die schriftliche Addition

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Addition und Subtraktion****Die schriftliche Addition**

Dies wollen wir anhand von Beispielen näher erläutern. Wir addieren die Zahlen 647 und 479. Zunächst erinnern wir uns daran, dass diese Zahlen als Potenzen wie folgt geschrieben werden:

Wir schreiben dies als Rechentabelle, in der die Spalten mit den Potenzen von zehn überschrieben sind:

Wir addieren zunächst die Einer: $7 + 9 = 16$ also = ein 10er und sechs 1er.

Die 6 schreiben wir in die 10^0 Spalte unten rechts und eine kleine 1 in die Zeile Übertrag und die 10^1 Spalte.

Analog verfahren wir mit den folgenden Spalten:

$4 + 7 + 1 = 12$ 2 in die 10^1 Spalte und Übertrag 1 in die 10^2 Spalte.

$6 + 4 + 1 = 11$ 1 in die 10^2 Spalte und Übertrag 1 in die 10^3 Spalte.

Wir tragen noch den Übertrag = 1 ein und erhalten das Ergebnis

$$647 = 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \quad \text{und}$$

$$479 = 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

	10^3	10^2	10^1	10^0
		6	4	7
+		4	7	9
Übertrag	1	1	1	
	1	1	2	6

Im nächsten Beispiel wollen die folgenden Zahlen in derselben Weise addieren:

$$26073 + 2779 + 309 + 3560 + 63 + 4132 = 36916$$

$3 + 9 + 9 + 0 + 3 + 2 = 26$ 6 in 10^0 – Spalte und Übertrag 2 in 10^1 Spalte
 $7 + 7 + 0 + 6 + 6 + 3 + 2 = 31$ 1 in 10^1 – Spalte und Übertrag 3 in 10^2 Spalte
 $0 + 7 + 3 + 5 + 0 + 1 + 3 = 19$ 9 in 10^2 – Spalte und Übertrag 1 in 10^3 Spalte
 $6 + 2 + 0 + 3 + 0 + 4 + 1 = 16$ 6 in 10^3 – Spalte und Übertrag 1 in 10^4 Spalte
 $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3$ 3 in 10^4 – Spalte

	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	2	6	0	7	3
		2	7	7	9
			3	0	9
		3	5	6	0
				6	3
+		4	1	3	2
Übertrag	1	1	3	2	
	3	6	9	1	6

Beispiel mit vereinfachtem Rechenschema:

$$43702 + 16435 + 403 + 2074 + 84 + 5728 = 68426$$

	Ü	Z							
			4	3	7	0	2		
			1	6	4	3	5		
					4	0	3		
			2	0	7	4			
					8	4			
+			5	7	2	8			
	1	2	2	2					
	6	8	4	2	6				

2.2.1.3 Die schriftliche Addition mit Nachkommastellen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Addition und Subtraktion****Die schriftliche Addition mit Nachkommastellen**

Bis jetzt haben wir uns ausschließlich mit der Addition von ganzen Zahlen beschäftigt und die restlichen Zahlen außer acht gelassen. Dies holen wir im folgenden Beispiel mit Hilfe unserer tabellarischen Schreibweise nach.

Es sollen folgende Zahlen addiert werden: $146,478 + 34,97 + 4 + 7,5021 = 192,9501$

In diesem Fall wird das Rechenschema um Spalten mit negativen Zehnerpotenzen erweitert. Der dickere Strich zwischen der Spalte 10^0 und 10^{-1} markiert hierbei die Stellung des Kommas.

Wir addieren zunächst die Spalte 10^{-4} und tragen unten die 1 ein.

In der Spalte 10^{-3} erhalten wir als Summe 10. Die 0 tragen wir als Zahl und die 1 als Übertrag ein.

In Spalte 10^{-2} erhalten wir als Summe + Übertrag = 15. Die 5 tragen wir als Zahl und die 1 als Übertrag ein.

Restliche Spalten: $Z = 9 \quad \ddot{U} = 1$; $Z = 2 \quad \ddot{U} = 2$; $Z = 9 \quad \ddot{U} = 0$; $Z = 1 \quad \ddot{U} = 0$

Wie man sieht, funktioniert der Algorithmus genauso, wie bei den ganzen Zahlen.

	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
	1	4	6	4	7	8	0
		3	4	9	7	0	0
			4	0	0	0	0
+			7	5	0	2	1
Übertrag		2	1	1	1		
	1	9	2	9	5	0	1

Jetzt noch ein Beispiel mit dem vereinfachten Rechenschema.

Folgende Zahlen sollen addiert werden:

$$549,428 + 726,6047 + 974,4273 + 358,7458 = 2609,2058$$

Wieder schreiben wir die Zahlen nach Zehnerpotenzen geordnet übereinander und addieren Spaltenweise:

Auch periodische Dezimalzahlen und die Irrationalzahlen lassen sich nach diesem Schema problemlos addieren.

	Ü	Z
$0 + 7 + 3 + 8$	=	1 8
$8 + 4 + 7 + 5 + 1$	=	2 5
$2 + 0 + 2 + 4 + 2$	=	1 0
$4 + 6 + 4 + 7 + 1$	=	2 2
$9 + 6 + 4 + 8 + 2$	=	2 9
$4 + 2 + 7 + 5 + 2$	=	2 0
$5 + 7 + 9 + 3 + 2$	=	2 6
$+ 2$	=	0 2

	5	4	9,	4	2	8	0
	7	2	6,	6	0	4	7
	9	7	4,	4	2	7	3
+	3	5	8,	7	4	5	8
	2	2	2	2	1	2	1
	2	6	0	9,	2	0	5
							8

2.2.1.4 Die Subtraktion

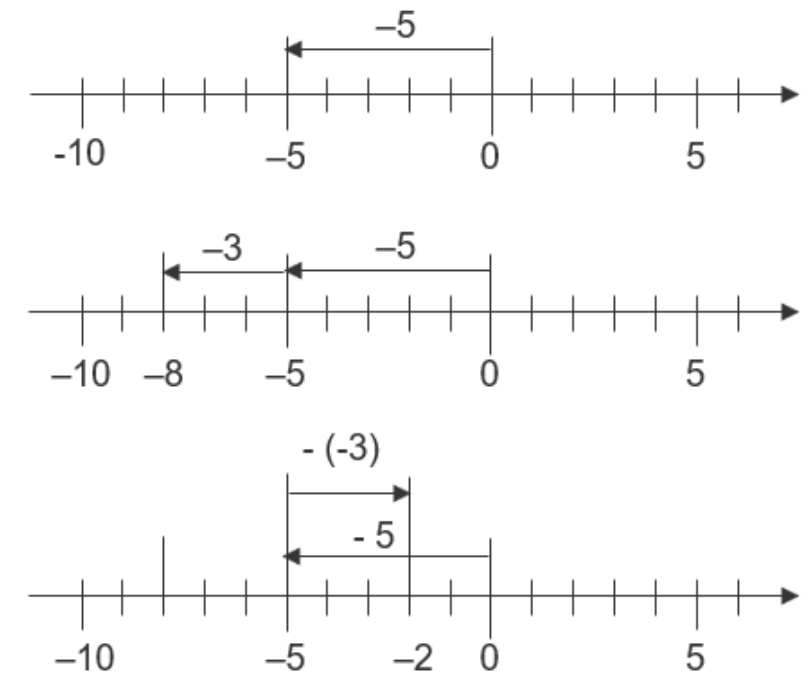
Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Addition und Subtraktion****Die Subtraktion**

Auch die Subtraktion können wir als eine Verschiebung auf der Zahlengeraden auffassen.

Hierzu betrachten wir z.B. die Zahl -5 . Wir erreichen diese, indem wir vom Ursprung der Zahlengeraden 5 ganze Einheiten nach links gehen. Man kann dies als eine Addition von $0 + (-5) = -5$ oder auch als eine Subtraktion von $0 - 5 = -5$ auffassen. Somit ist die Subtraktion die Umkehroperation der Addition.

Wenn wir von -5 eine weitere Zahl, z.B. die -3 subtrahieren, dann können wir eine weitere Verschiebung einzeichnen. Es gilt dann: $0 - 5 - 3 = -8$ oder auch $0 + (-5) + (-3) = -8$.

Jede negative Zahl in einer Addition ist eine Anweisung, von der aktuellen Position eine Anzahl von Einheiten nach links zu gehen. Tauchen zwei negative Vorzeichen auf, z.B. $-5 - (-3) = -5 + 3 = -2$, dann ist dies eine Aufforderung drei Einheiten nach rechts zu gehen (doppelte Richtungsumkehr).

**Die schriftliche Subtraktion**

Sofern keine positiven Zahlen in der Subtraktion auftreten, gelten hier dieselben Rechenregeln, wie bei der schriftlichen Addition. Wir müssen lediglich vor jede Zeile ein Minuszeichen setzen.

$$\begin{array}{r}
 - \quad 1 \quad 4 \quad 6, \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \\
 - \quad \quad 3 \quad 4, \quad 9 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \quad \quad 4, \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \quad \quad 7, \quad 5 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 - \quad 1 \quad 9 \quad 2, \quad 9 \quad 5 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

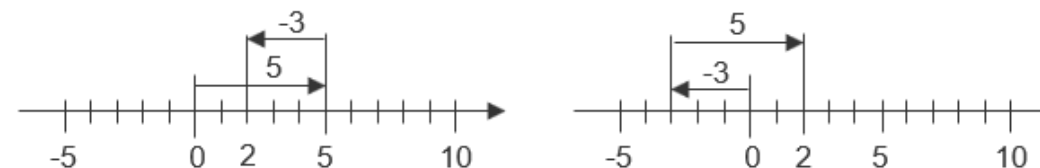
Addition und Subtraktion

Wenn positive und negative Zahlen zusammen in einer Rechnung auftauchen, dann können die entsprechenden Anweisungen in der Reihenfolge ihres Auftretens befolgt werden, z.B.:

$5 - 3 = 2$ oder $5 + (-3) = 2$ bedeutet folgendes:

Gehe vom Ursprung 0 der Zahlengeraden 5 Schritte nach rechts und anschließend 3 Schritte nach links.

Natürlich gilt dasselbe in umgekehrter Reihenfolge. $-3 + 5 = 2$

**Addition und Subtraktion gemischt**

Beispiel: $-5 + 4 - 6 + 8 + 17 - 45 + 20$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
 -5 + 4 &= -1 \\
 -1 - 6 &= -7 \\
 -7 + 8 &= 1 \\
 1 + 17 &= 18 \\
 18 - 45 &= -27 \\
 -27 + 20 &= -7
 \end{aligned}$$

Man kann auch vertauschen:

$-5 - 6 - 45 + 4 + 8 + 17 + 20 = -56 + 49 = -7$ oder
 $4 + 8 + 17 + 20 - 5 - 6 - 45 = 49 - 56 = -7$

2.2.2 Schriftliche Addition und Subtraktion

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Addition und Subtraktion****Schriftliche Addition und Subtraktion**

Zunächst ein Beispiel, in dem die positive Zahl in allen Stellen größer ist als die negative: $345 - 132 = 213$

Zur Lösung greifen wir wieder auf unsere bewährte Tabelle zurück.

Wir subtrahieren zunächst die Einer $5 - 2 = 3$ und tragen 3 in die Ergebniszeile ein.

Genauso verfahren wir mit den Zehnern und den Hundertern $4 - 3 = 1$ und $3 - 1 = 2$

	10^2	10^1	10^0
	3	4	5
	-1	-3	-2
Übertrag			
	2	1	3

Im nächsten Beispiel ist die 6 in der Einerspalte absolut kleiner als die 9, so dass wir nicht so ohne Weiteres subtrahieren können. Wir leihen uns nun aus der 10^1 Spalte einen Zehner und tragen zum Ausgleich - 1 in den Übertrag ein. Den geliehenen Zehner addieren wir gedanklich zur 6 und rechnen nun $16 - 9 = 7$.

In der 10^1 Spalte verfahren wir genauso, leihen uns einen Hunderter, tragen den Übertrag -1 ein und rechnen $13 - 7 - 1 = 5$. Zum Schluss rechnen wir noch $4 - 3 - 1 = 0$, wobei die Null nicht mehr eingetragen wird.

	10^2	10^1	10^0
	4	3	6
	-3	-7	-9
Übertrag	-1	-1	
		5	7

Nun wollen wir zeigen, wie man eine beliebige Anzahl von positiven und negativen Zahlen zweckmäßigerweise addiert und subtrahiert, wobei die Vorgehensweise variiert werden kann:

Beispiel: $-345,312 + 172,53 + 236,9876 - 826 + 3456,14 - 4567,932 + 12,19 - 37,98624$.

Wir vertauschen die Reihenfolge und schreiben zunächst die positiven und dann die negativen Zahlen:

$172,53 + 236,9876 + 3456,14 + 12,19 - 345,312 - 826 - 4567,932 - 37,98624$

Im Vorgriff auf die Regeln der Klammersetzung können wir auch schreiben:

$172,53 + 236,9876 + 3456,14 + 12,19 - (345,312 + 826 + 4567,932 + 37,98624)$

Dies ist eine Subtraktion zweier positiver Summen. Wir rechnen zunächst die linke Summe aus:

Dasselbe tun wir mit der Klammer: Wir sehen: Summe negativer Zahlen > Summe positiver Zahlen.

Zur Berechnung der Differenz schreiben wir jetzt die größere Summe mit negativem Vorzeichen in die erste Zeile und die kleinere darunter, so dass sich folgende Berechnung ergibt:

1 7 2, 5 3 0 0	3 4 5, 3 1 2 0 0
2 3 6, 9 8 7 6	8 2 6, 0 0 0 0 0
3 4 5 6, 1 4 0 0	4 5 6 7, 9 3 2 0 0
+ 1 2, 1 9 0 0	+ 3 7, 9 8 6 2 4
1 1 1 2	1 1 2 2 1 1
3 8 7 7, 8 4 7 6	5 7 7 7, 2 3 0 2 4
Summe positiver Zahlen	Summe negativer Zahlen
- 5 7 7 7, 2 3 0 2 4	
3 8 7 7, 8 4 7 6 0	
1 1 1 1 1 1 1	
- 1 8 9 9, 3 8 2 6 4	

2.2.3 Multiplikation Grundlagen

2.2.3.1 Grundlagen der Multiplikation

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Multiplikation Grundlagen****Grundlagen der Multiplikation**

Die Multiplikation ist eine wiederholte Addition ein und derselben Zahl. Wenn wir z.B. die Zahl 3 sieben mal addieren 7, dann erhalten wir:

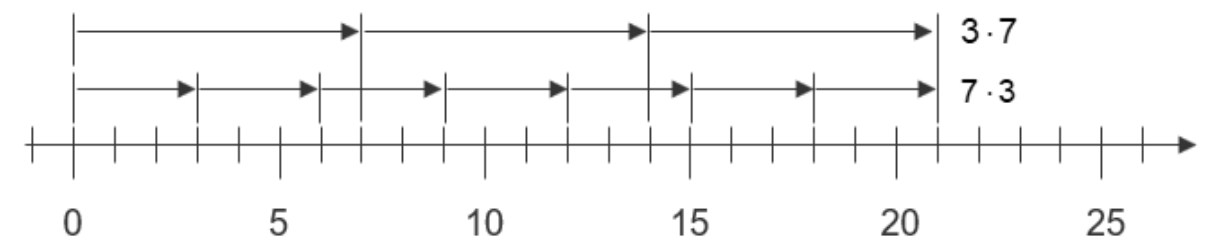
Für die fortgesetzte Summenbildung kann man auch das Summenzeichen schreiben:

Wir können also folgendes behaupten: $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7 = 21$

Es ist also unerheblich, ob wir vom Nullpunkt ausgehend drei mal sieben Einheiten oder sieben mal drei Einheiten nach rechts zurücklegen, das Ergebnis ist in beiden Fällen dasselbe. Dies nennt man auch Vertauschungsgesetz oder Kommutativgesetz der Multiplikation.

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 \cdot 3 = 21$$

$$\sum_{i=1}^7 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 \cdot 3 = 21 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^3 7 = 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$$



Bislang haben wir nur positive ganze Zahlen multipliziert. Negative Zahlen stellen eine Anweisung zur Richtungsumkehr dar, so dass wir die Multiplikation negativer Zahlen wie folgt schreiben:

Mit dem Summenzeichen kann man auch schreiben:

Oder einfacher:

Folgende weitere Schreibweisen sind ebenfalls gültig:

Bei den Vertauschungen haben wir auch eine etwas seltsame Schreibweise verwendet, nämlich:

$$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 7 \cdot (-3) = -21$$

$$\sum_{i=1}^7 (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 7 \cdot (-3) = -21$$

$$\sum_{i=1}^7 (-3) = -3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 = 7 \cdot (-3) = -21$$

$$7 \cdot (-3) = 7 \cdot (-1) \cdot 3 = (-1) \cdot 7 \cdot 3 = -7 \cdot 3 = -(7 \cdot 3) = -(3 \cdot 7) = -21$$

$$-7 \cdot 3 = -21$$

Nach unserer ersten Definition hieße dies: Die Zahl 3 soll -7 mal addiert werden. Spätestens hier müssen wir unsere ursprüngliche Definition wie folgt modifizieren:

Die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl ist dasselbe, wie die Multiplikation von (-1) mit den positiven Anteilen der beiden Zahlen:

$$-a \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b = -(a \cdot b) \quad \text{mit} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad b > 0$$

2.2.3.2 Begriffe und Multiplikation negativer Zahlen

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Rechnen mit reellen Zahlen – Multiplikation Grundlagen

Produkt

Hierunter versteht man die Multiplikation mehrerer Zahlen. Statt zu sagen: „multipliziere a und b“ kann man auch sagen: „bilde das Produkt aus a und b“.

Faktoren

Wenn das Produkt aus a und b wie folgt gegeben ist: $a \cdot b$, dann nennt man a und b auch die Faktoren des Produkts. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren bestehen kann, z.B.: $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots$

Koeffizient

Besteht ein Produkt aus Faktor und einem anderen mathematischen Ausdruck, dann heißt der Faktor auch Koeffizient, z.B.: $a \cdot (b + c)$. a ist hier der Koeffizient des Ausdrucks (b + c).

Absolutwert

Den absoluten Wert einer negativen reellen Zahl erhält man durch Weglassen des negativen Vorzeichens. Bei einer positiven Zahl ist er identisch mit der Zahl selbst. Man nennt den Absolutwert auch Betrag oder positiver Anteil. Der Absolutwert wird meistens mit zwei Betragsstrichen geschrieben, z.B.:
 $| -7 | = 7$; $| -345 | = 345$; $| 84 | = 84$; $| -2,65 | = 2,65$

Multiplikation negativer Zahlen

Als Beispiel wollen wir folgende Aufgabe lösen:	$(-3) \cdot (-7)$
Man kann die Aufgabe auch wie folgt schreiben:	$(-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 7$
Wir vertauschen die Faktoren:	$(-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 7$
Wir berechnen das Produkt aus 3 und 7:	$(-1) \cdot (-1) \cdot 21$
Statt der ersten (-1) schreiben wir ein Minuszeichen:	$-(-1) \cdot 21$

Operatoren und Operanden

Ein Operator ist eine mathematische Handlungsvorschrift, wie eine Rechenoperation durchzuführen ist. Sie legt fest, wie bei Berechnungen mit den Operanden verfahren werden soll. Bei der Rechenoperation $3 + 7$ sind die Zahlen die Operanden und das Plus-Zeichen der Operator. Dasselbe gilt auch für alle anderen Rechenbefehle.

Vorzeichen oder Signum

Das Vorzeichen steht vor einer Zahl und zeigt an, ob diese Zahl positiv oder negativ ist. Bei positiven Zahlen wird das Vorzeichen meistens weggelassen. Kommen Operatoren und Vorzeichen in einer Rechnung hintereinander vor, dann wird die Zahl mit dem Vorzeichen geklammert, z.B.: $3 - (-1) = 4$ oder $5 \cdot (-3) = -15$

Gerade und ungerade Zahlen

Eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ heißt dann gerade, wenn sie sich ohne Rest durch Zwei teilen lässt. Verbleibt bei der Division durch 2 ein Rest von 1 dann heißt die Zahl ungerade.

Gerade Zahlen:	2, 4, 6, 8, 12, 566, ...
Ungerade Zahlen:	1, 3, 5, 7, 13, 567, ...

Es handelt sich hier um eine doppelte Richtungsumkehr, die wir bereits bei der Subtraktion kennen gelernt haben. Wir können also schreiben: $-(-1) \cdot 21 = 21$

Beispiel mit mehreren Faktoren: $(-3) \cdot (-7) \cdot 5 \cdot (-2) = 21 \cdot 5 \cdot (-2) = 105 \cdot (-2) = -210$

Auch hier können wir die Faktoren beliebig vertauschen (Kommutativgesetz) und bei Klammern die Operationen innerhalb der Klammern zuerst und die restlichen Operationen zuletzt ausführen (Verbindungsgesetz oder Assoziativgesetz).

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral

 Grundlagen der Arithmetik und Algebra
Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Multiplikation

Die schriftliche Multiplikation

Die schriftliche Multiplikation lernen wir anhand von Beispielen kennen, wobei wir erneut auf unsere bewährte Rechentabelle aus der Addition und Subtraktion zurückgreifen. Als erstes berechnen wir das Produkt : $89 \cdot 7 = ?$

Wir rechnen: $7 \cdot 9 = 63$, schreiben die 3 unter 10^0 und eine kleine 6 als Überhang (Ü) davor (man sagt hier auch „6 im Sinn“)

Nun rechnen wir: $7 \cdot 8 = 56$, addieren zur 6 den Ü $\rightarrow 6 + 6 = 12$ schreiben die 2 unter 10^1 und $5 + 1 = 6$ unter 10^2 .

Jetzt vertauschen wir die Faktoren: $7 \cdot 89 = ?$ Wir rechnen: $8 \cdot 7 = 56$, schreiben die 6 unter 10^1 und die 5 unter 10^2 .

Nun rechnen wir: $9 \cdot 7 = 63$, schreiben die 3 unter 10^0 und die 6 unter 10^1 .

Zum Schluss addieren wir die beiden Zeilen: $0 + 3 = 3$ $6 + 6 = 12$ 2 und Ü = 1 $5 + 1 = 6$

8	9	.	7
	10^2	10^1	10^0
6	2	63	
7	.	8	9
	10^2	10^1	10^0
5	6		
	6	3	
1			
6	2	3	

Im nächsten Beispiel berechnen wir das Produkt : $583 \cdot 756 = ?$ In die oberste Zeile tragen wir die zu lösende Aufgabe ein, darunter schreiben wir wieder die Zehnerpotenzen.

Wir rechnen nun $7 \cdot 3 = 21$. Die 1 tragen wir in die Spalte 10^2 ein und schreiben die kleine 2 davor. Letzteres soll uns daran erinnern, dass dort noch ein Überhang (Ü) von $2 \cdot 10^3$ zu berücksichtigen ist („2 im Sinn“).

Danach rechnen wir $7 \cdot 8 = 56$, addieren zur 6 den Ü $\rightarrow 6 + 2 = 8$, schreiben die 8 in Spalte 10^3 und Ü = 5 davor.

Analog rechnen wir $7 \cdot 5 = 35$, addieren $5 + \text{Ü} \rightarrow 5 + 5 = 10$, schreiben die 0 in Spalte 10^4 und $3 + 1 = 4$ in Spalte 10^5 .

Mit den folgenden Zeilen verfahren genauso:

$5 \cdot 3 = 15$ 5 in Spalte 10^1 Ü = 1 $6 \cdot 3 = 18$ 8 in Spalte 10^0 Ü = 1

$5 \cdot 8 = 40$ $0 + \text{Ü} = 0 + 1 = 1$ in Spalte 10^2 Ü = 4 $6 \cdot 8 = 48$ $8 + \text{Ü} = 8 + 1 = 9$ in Spalte 10^1 Ü = 4

$5 \cdot 5 = 25$ $5 + \text{Ü} = 5 + 4 = 9$ in Spalte 10^3 und 2 in Spalte 10^4 $6 \cdot 5 = 30$ $0 + \text{Ü} = 0 + 4 = 4$ in Spalte 10^2 und 3 in Spalte 10^3

Jetzt müssen wir nur noch die berechneten Zeilen addieren. Wir beginnen mit der 10^0 Spalte und schreiben die 8 hin.

In der nächsten Spalte addieren wir $5 + 9 = 14$, schreiben die 4 hin und machen einen Übertrag von 1.

Danach addieren wir $1 + 1 + 4 + 1 = 7$ ohne Übertrag und $8 + 9 + 3 = 20$, wir schreiben die 0 und den Übertrag 2.

Es folgt $0 + 2 + 2 = 4$ in der 10^4 und die 4 in der der 10^5 -Spalte. Wir erhalten als Ergebnis 440748.

5	8	3	.	7	5	6
10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
	4	0	58	21		
		2	9	41	15	
			3	4	49	18
		2		1		
4	4	0	7	4	8	

2.2.4.3 Schriftliche Multiplikation zweier Dezimalzahlen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Multiplikation****Schriftliche Multiplikation zweier Dezimalzahlen**

Jetzt behandeln wir anhand eines Beispiels die schriftliche Multiplikation zweier Dezimalzahlen.

Wir wollen folgendes Produkt berechnen : $49,174 \cdot 64,57 = ?$

Damit wir unser bisheriges Rechenschema beibehalten können, müssen wir die Faktoren umformen.

Den ersten Faktor multiplizieren wir mit $10^3 = 1000$ und erhalten: $49,174 \cdot 1000 = 49174$.

Durch diese Operation wird das Komma um drei Stellen nach rechts verschoben.

Im Gegenzug dividieren wir den zweiten Faktor durch 1000, so dass dort das Komma um drei Stellen nach links verschoben wird: Wir erhalten: $64,57 : 1000 = 0,06457$

Da die Multiplikation mit 1000 durch die Division durch 1000 exakt aufgehoben wird, ändert sich am Gesamtergebnis nichts. Es gilt: $1000 : 1000 = 1$

Jetzt können wir unser Rechenschema hinschreiben und rechnen:

$0 \cdot 49174 = 0$	0 hinschreiben
$0 \cdot 49174 = 0$	0 hinschreiben
$6 \cdot 4 = 24$	4 hinschreiben und 2 im Sinn
$6 \cdot 7 = 42$ $2 + 2$ im Sinn = 4	4 hinschreiben und 4 im Sinn
$6 \cdot 1 = 06$ $6 + 4$ im Sinn = 10	0 hinschreiben und $0 + 1 = 1$ im Sinn
$6 \cdot 9 = 54$ $4 + 1$ im Sinn = 5	5 hinschreiben und 5 im Sinn
$6 \cdot 4 = 24$ $4 + 5$ im Sinn = 9	9 hinschreiben und 2 hinschreiben

Die restlichen Zeilen ergeben sich analog:

Zum Schluss addieren wir die 6 Zeilen:

$$\begin{array}{r}
 49174 \cdot 0,06457 \\
 \hline
 0 \\
 0 \\
 295044 \\
 196696 \\
 245870 \\
 344218 \\
 \hline
 111221 \\
 3175,16518
 \end{array}$$

2.2.5 Division Grundlagen

2.2.5.1 Grundlagen der Division

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral



Grundlagen der Arithmetik und Algebra

Rechnen mit reellen Zahlen – Division Grundlagen

Grundlagen der Division

Die Division ist die Umkehroperation zur Multiplikation, welche als eine wiederholte Addition einer Zahl eingeführt wurde. Bei der Division fragt man nun: „wie oft kann z.B. die Zahl 3 von 21 abgezogen werden, bis keinerlei Rest mehr vorhanden ist“.

Man kann es auch so formulieren: „wie kann man 21 Einheiten – z.B. Münzen – auf drei Personen verteilen, so dass jede Person dieselbe Anzahl von Münzen erhält?“

Dabei geben wir schrittweise jeder Person eine Münze, bis keine weitere vorhanden ist.

$21 - 3 = 18$; $18 - 3 = 15$; $15 - 3 = 12$; $12 - 3 = 9$; $9 - 3 = 6$; $6 - 3 = 3$; $3 - 3 = 0$

Nach 7 Schritten sind die Münzen aufgebraucht. Wir schreiben auch: $21 : 3 = 7$

Benennungen

21 geteilt durch 7 oder
21 dividiert durch 7 oder kurz
21 durch 7

Schreibweisen

$21 : 3 = 7$ $21 / 3 = 7$ $\frac{21}{3} = 7$

Die 3. Schreibweise heißt Bruch.

Zahl vor Divisionszeichen → Dividend

Zahl hinter Divisionszeichen → Divisor oder Teiler

Zahl über dem Bruchstrich → Zähler

Zahl unter dem Bruchstrich → Nenner

Die Ausdrücke $a : b$, a / b oder $\frac{a}{b}$ heißen jeweils Quotient.

Division als Umkehrfunktion zur Multiplikation

Beispiel: $7 \cdot 3 = 21$.

Wenn wir nun rechnen $21 : 7 = 3$, erhalten wir wieder den Ursprungswert 3.

Also ist die Division die Umkehroperation zur Multiplikation. Dies macht man sich zunutze, indem man nach einer Divisionsrechnung die sogenannte Probe durchführt.

Wenn wir z.B. die Aufgabe $42 : 7 = 6$ gerechnet haben, kann dieses Ergebnis durch folgende Aussage untermauert werden: „denn $6 \cdot 7 = 42$ “.

Vertauschen der Operanden bei der Division

Bei Addition und Multiplikation konnten wir die Operanden vertauschen. Wir wollen dies einmal bei der Division versuchen, also: $42 : 7 = 6$ und $7 : 42 = ??$

Das Kommutativgesetz gilt bei der Division nicht!

Division von mehreren Zahlen

Beispiel: $54 : 6 : 3 = 9 : 3 = 3$ Reihenfolge von links nach rechts

Rechnen wir zunächst $6 : 3 = 2$ und anschließend $54 : 2 = 27$, dann stimmt das Ergebnis offensichtlich nicht. Daraus folgt:

Die Division mehrerer Zahlen wird immer von links nach rechts durchgeführt.

⇒ Bei der Division gilt weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz.

2.2.5.2 Division negativer Zahlen und mit Rest

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Division Grundlagen****Division negativer Zahlen**

Beispiel: $54 : (-6) = ?$

Wir schreiben nun anstelle des Fragezeichens ein x , welches das Ergebnis der Division repräsentiert: $54 : (-6) = x$

Wird x als bekannt vorausgesetzt dann folgt: wenn $54 : (-6) = x$ dann $x \cdot (-6) = 54$

Dies kann auch wie folgt geschrieben werden: $x \cdot 6 = -54 = (-1) \cdot 54$

Wenn wir nun wieder die Umkehroperation durchführen, dann gilt:

$$(-1) \cdot (54 : 6) = x \Rightarrow (-1) \cdot (9) = -9 = x \text{ oder auch } x = -9$$

Allgemein kann man auch sagen: $a : (-b) = -(a : b)$

Was passiert nun, wenn der Dividend negativ und der Divisor positiv ist: $(-54) : 6 = x$
Mit der Umkehroperation folgt: wenn $(-54) : 6 = x$ dann $x \cdot 6 = -54 = (-1) \cdot 54$

Wir erhalten also dasselbe wie vorher, so dass gilt: $(-a) : b = -(a : b)$

Bleibt noch der Fall, dass Dividend und Divisor beide negativ sind: $(-54) : (-6) = x$

Mit der Umkehroperation folgt: wenn $(-54) : (-6) = x$ dann $x \cdot (-6) = (-54)$

Wir wandeln dies wie folgt um: $x \cdot 6 = (-1) \cdot (-54) = (-1) \cdot (-1) \cdot 54 = 54$

Allgemein kann man also schreiben: $(-a) : (-b) = a : b$

Zusammenfassend kann man bei der Division folgendes sagen:

$(+) : (+) = (+)$	positive Zahl : positive Zahl	= positive Zahl
$(+) : (-) = (-)$	positive Zahl : negative Zahl	= negative Zahl
$(-) : (+) = (-)$	negative Zahl : positive Zahl	= negative Zahl
$(-) : (-) = (+)$	negative Zahl : negative Zahl	= positive Zahl

Division mit Rest

Beispiel: Es sollen 23 Äpfel auf drei Personen verteilt werden.

Wir geben jeder Person jeweils einen Apfel bis jede der Personen 7 Äpfel hat.

Es bleiben also $23 - 21 = 2$ Äpfel über. Allgemein schreibt man: $23 : 3 = 7$ Rest 2.

Dieser Rest muss natürlich auch auf die 3 Personen aufgeteilt werden.

Da es sich um Äpfel handelt, können wir wie folgt weiter verfahren:

Wir gehen in die Küche, holen ein Messer und zerteilen jeden der beiden Apfel in drei gleich große Teile. Jedes dieser 6 gleich großen Teile sind ein Drittel eines ganzen Apfels. Um nun weiter gerecht aufzuteilen, erhält jede der drei Personen noch 2 dieser Teile, also genau 2 Drittel oder als Quotient geschrieben $2 : 3$.

Im Vorgriff auf die Bruchrechnung schreibt man dies auch als: $\frac{2}{3}$ (zwei Drittel)

Jede Person bekommt also $7 + \frac{2}{3}$ Äpfel.

Somit können wir die Aufgabe wie folgt schreiben: $23 : 3 = 7 + \frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$

Regel für die Division mit Rest

Berechne das ganzzahlige Ergebnis und schreibe es hinter das Gleichheitszeichen. Ziehe dahinter einen Bruchstrich und schreibe oberhalb des Bruchstrichs den Rest als Zähler und unterhalb des Bruchstrichs den Nenner der Aufgabe.

2.2.6 Beispiele für die schriftliche Division

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Division 1****Die schriftliche Division**

Wieder beginnen wir mit einem einfachen Beispiel:

$$767 : 13 = ?$$

Frage: Wie oft ist die 13 gänzlich in 7 enthalten?

Die Antwort lautet: „keinmal“.

Nun nehmen wir die 6 hinzu und fragen:

Wie oft ist 13 gänzlich in 76 enthalten ?

Die Antwort lautet: 5 mal.

5 aufschreiben und rückwärtsrechnen (Probe)

$$5 \cdot 3 = 15 \text{ (1 im Sinn)}$$

5 unter die 6 schreiben

$$5 \cdot 1 = 5 \text{ + 1 im Sinn} = 6$$

6 unter die 7 schreiben

$$6 - 5 = 1 \text{ und } 7 - 6 = 1$$

Rest ermitteln: $76 - 65$

Die 117 durch 13 dividieren

$\Rightarrow$

Ergebnis 9 aufschreiben

7 herunterholen und hinter die 11 schreiben.

$$9 \cdot 3 = 27 \text{ (2 im Sinn),}$$

7 unter die 7 schreiben

$$9 \cdot 1 = 9 \text{ + 2 im Sinn} = 11$$

11 unter die 11 schreiben

Zur Probe wieder rückwärts rechnen.

$$\begin{array}{r} 767 : 13 = 59 \\ \underline{65} \\ 117 \\ \underline{117} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Rest = 0 Aufgabe ganzzahlig gelöst.

Als nächstes zeigen wir als erweitertes Beispiel die Rechnung: $4032 : 56 = ?$

Wir sehen, dass 56 weder in 4 noch in 40 gänzlich enthalten ist und beginnen gleich mit $403 : 56 = 7 + \text{Rest}$.

7 aufschreiben und rückwärtsrechnen (Probe)

$$7 \cdot 6 = 42 \text{ 2 und 4 im Sinn } 7 \cdot 5 = 35 \text{ 5 + 4 im Sinn} = 9 \text{ und 3}$$

Rest ermitteln: $403 - 392$

$$3 - 2 = 1, \quad 0 - 9 = 1 \quad \ddot{U} = 1 \text{ und } 4 - (3 + 1) = 0$$

2 runterholen und hinter die 11 schreiben

Die 112 durch 56 dividieren

$\Rightarrow$

Ergebnis 2 aufschreiben

Zur Probe wieder rückwärts rechnen.

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ 2 und 1 im Sinn } 2 \cdot 5 = 10 \text{ + 1 im Sinn} = 11$$

$$\begin{array}{r} 4032 : 56 = 72 \\ \underline{392} \\ 112 \\ \underline{112} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Rest = 0 Aufgabe ganzzahlig gelöst.

2.2.7 Schriftliche Division mit Rest

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Division 2****Die schriftliche Division mit Rest**

Im Folgenden zeigen wir ein Beispiel für die Division mit Rest.: $47625 : 96 = ?$

Zunächst rechnen wir	$476 : 96 = 4 + \text{Rest}$	$4 \cdot 6 = 24$	$4 \cdot 9 = 36 + 2 = 38$
Wir berechnen den Rest:	$6 - 4 = 2$	$7 - 8 = 9 \text{ } \ddot{U}=1$	$4 - (3+1) = 0$
2 herunterholen und rechnen	$922 : 96 = 9 + \text{Rest}$	$9 \cdot 6 = 54$	$9 \cdot 9 = 81 + 5 = 86$
Wir berechnen den Rest:	$2 - 4 = 8 \text{ } \ddot{U}=1$	$2 - (6+1) = 5 \text{ } \ddot{U}=1$	$9 - (8+1) = 0$
5 herunterholen und rechnen	$585 : 96 = 6 + \text{Rest}$	$6 \cdot 6 = 36$	$6 \cdot 9 = 54 + 3 = 57$
Wir berechnen den Rest:	$5 - 6 = 9 \text{ } \ddot{U}=1$	$8 - (7+1) = 0$	$5 - 5 = 0$
Wir tragen ein	Rest 9	$= 496 \frac{9}{96}$	

$$\begin{array}{r}
 47625 : 96 = 496 \text{ Rest } 9 = 496 \frac{9}{96} \\
 \begin{array}{r}
 3_1 \quad 8 \quad 4 \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 9 \quad 2 \quad 2 \\
 \hline
 8_1 \quad 6_1 \quad 4 \quad \downarrow \\
 0 \quad 5 \quad 8 \quad 5 \\
 \hline
 5 \quad 7_1 \quad 6 \\
 \hline
 9
 \end{array}
 \end{array}$$

Nun wollen wir das Ergebnis als Dezimalzahl erhalten und schreiben die Aufgabe nochmal hin:.

Hinter die 5 des Divisors schreiben wir ein Komma und hängen dort einige Nullen als Nachkommastellen an. Dadurch wird der Wert des Divisors nicht verändert. Außerdem schreiben wir hinter die 6 des Ergebnisses ebenfalls ein Komma.

Nun können wir weiterrechnen, holen zunächst die erste Null herunter und stellen die Frage:

Wie oft ist 96 ganzzahlig in 90 enthalten? Die Antwort lautet „keinmal“ und wir schreiben eine 0.

0 herunterholen und rechnen	$900 : 96 = 9 + \text{Rest}$	$9 \cdot 6 = 54$	$9 \cdot 9 = 81 + 5 = 86$
Wir berechnen den Rest:	$0 - 4 = 6 \text{ } \ddot{U}=1$	$0 - (6+1) = 3 \text{ } \ddot{U}=1$	$9 - (8+1) = 0$
0 herunterholen und rechnen	$360 : 96 = 3 + \text{Rest}$	$3 \cdot 6 = 18$	$3 \cdot 9 = 27 + 1 = 28$
Wir berechnen den Rest:	$0 - 8 = 2 \text{ } \ddot{U}=1$	$6 - (8+1) = 7 \text{ } \ddot{U}=1$	$3 - (2+1) = 0$
0 herunterholen und rechnen	$720 : 96 = 7 + \text{Rest}$	$7 \cdot 6 = 42$	$7 \cdot 9 = 63 + 4 = 67$
Wir berechnen den Rest:	$0 - 2 = 8 \text{ } \ddot{U}=1$	$2 - (7+1) = 4 \text{ } \ddot{U}=1$	$7 - (6+1) = 0$
0 herunterholen und rechnen	$480 : 96 = 5$	$5 \cdot 6 = 30$	$5 \cdot 9 = 45 + 3 = 48$
Rest = 0			

$$\begin{array}{r}
 47625,00000 : 96 = 496,09375 \\
 \begin{array}{r}
 3_1 \quad 8 \quad 4 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 9 \quad 2 \quad 2 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 8_1 \quad 6_1 \quad 4 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 5 \quad 8 \quad 5 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 5 \quad 7_1 \quad 6 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 9 \quad 0 \quad 0 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 8_1 \quad 6_1 \quad 4 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 2_1 \quad 8_1 \quad 8 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 7 \quad 2 \quad 0 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 6_1 \quad 7_1 \quad 2 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 0 \quad 4 \quad 8 \quad 0 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 4 \quad 8 \quad 0 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

2.2.8 Die schriftliche Division mit Dezimalzahlen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Division 3****Die schriftliche Division mit Dezimalzahlen**

Im Folgenden zeigen wir ein Beispiel für die Division mit Dezimalzahl im Zähler: $385,836 : 13 = ?$

Zunächst rechnen wir	$38 : 13 = 2 + \text{Rest}$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 1 = 2$
Wir berechnen den Rest:	$8 - 6 = 2$	$3 - 2 = 1$	
5 herunterholen und rechnen	$125 : 13 = 9 + \text{Rest}$	$9 \cdot 3 = 27$	$9 \cdot 1 = 9 + 2 = 11$
Wir berechnen den Rest :	$5 - 7 = 8 \quad \ddot{U}=1$	$2 - (1+1) = 0$	$1 - 1 = 0$
8 herunterholen und rechnen	$88 : 13 = 6 + \text{Rest}$	$6 \cdot 3 = 18$	$6 \cdot 1 = 6 + 1 = 7$
Wir berechnen den Rest :	$8 - 8 = 0$	$8 - 7 = 1$	
1 herunterholen und rechnen	$101 : 13 = 7 + \text{Rest}$	$7 \cdot 3 = 21$	$7 \cdot 1 = 7 + 2 = 9$
Wir berechnen den Rest :	$1 - 1 = 0$	$0 - 9 = 1 \quad \ddot{U}=1$	$1 - (0+1) = 0$
4 herunterholen und rechnen	$104 : 13 = 8$	$8 \cdot 3 = 24$	$8 \cdot 1 = 8 + 2 = 10$
Rest = 0			

$$\begin{array}{r} 385,836 : 13 = 29,678 \\ \underline{26} \\ 125 \\ \underline{117} \\ 0088 \\ \underline{78} \\ 101 \\ \underline{91} \\ 0104 \\ \underline{104} \\ 0 \end{array}$$

Als nächstes betrachten beispielhaft die Division der Dezimalzahlen: $4,81 : 14,8 = ?$

Zur Lösung multiplizieren wir Zähler und Nenner mit 10^2 und erhalten $481 : 1480 = ?$

Der Wert des Ausdrucks wird dadurch nicht verändert.

Zunächst rechnen wir	$481 : 1480 = 0$	0, hinschreiben und	0 1 8 4 herunterholen				
Nun rechnen wir	$4810 : 1480 = 3 + \text{Rest}$	$3 \cdot 0 = 0$	$3 \cdot 8 = 24$	$3 \cdot 4 = 12 + 2 = 14$	$3 \cdot 1 = 3 + 1 = 4$		
Rest berechnen	$0 - 0 = 0$	$1 - 4 = 7 \quad \ddot{U}=1$	$8 - (4+1) = 3$	$4 - 4 = 0$			
0 herunter und rechnen	$3700 : 1480 = 2 + \text{Rest}$	$2 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 8 = 16$	$2 \cdot 4 = 8 + 1 = 9$	$2 \cdot 1 = 2$		
Rest berechnen	$0 - 0 = 0$	$0 - 6 = 4 \quad \ddot{U}=1$	$7 - (9+1) = 7 \quad \ddot{U}=1$	$3 - (2+1) = 0$			
0 herunter und rechnen	$7400 : 1480 = 5$	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 8 = 40$	$5 \cdot 4 = 20 + 4 = 24$	$5 \cdot 1 = 5 + 2 = 7$		
Rest = 0							

$$\begin{array}{r} 481 : 1480 = 0,325 \\ 4810 \\ \underline{4410} \\ 03700 \\ \underline{2960} \\ 07400 \\ \underline{7400} \\ 0 \end{array}$$

2.2.9 Die schriftliche Division mit unendlichen periodischen Dezimalbrüchen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Schriftliche Division 4****Unendliche periodische Dezimalbrüche**

Bei der Division mit Rest hatten wir folgenden Ausdruck erhalten: $23 : 3 = 7 + \frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$

Wir berechnen nun diese Aufgabe indem wir die neuen Erkenntnisse über die schriftliche Division nutzen:

Zunächst rechnen wir	$23 : 3 = 7 + \text{Rest}$	$7 \cdot 3 = 21$
Wir berechnen den Rest:	$3 - 1 = 2$	$2 - 2 = 0$
0 herunterholen und rechnen	$20 : 3 = 6 + \text{Rest}$	$6 \cdot 3 = 18$
Rest berechnen	$0 - 8 = 2 \quad \ddot{U}=1$	$2 - (1+1) = 0$
0 herunterholen und rechnen	$20 : 3 = 6 + \text{Rest}$	$6 \cdot 3 = 18$
Rest berechnen	$0 - 8 = 2 \quad \ddot{U}=1$	$2 - (1+1) = 0$
0 herunterholen und rechnen ...		

$$23 : 3 = 7,66 \dots$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 3 \overline{) 23} \\ \underline{21} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array}$$

Diese Berechnung kann ständig wiederholt werden, ohne jemals zu einem Ende zu gelangen. Man nennt dies einen unendlichen periodischen Dezimalbruch und schreibt: $23 : 3 = 7,6\overline{}$. Gesprochen: "23 dividiert durch 3 gleich 7, 6 Periode". Der Periodenstrich zeigt an, welche Zahl sich ständig wiederholt.

Im Folgenden zeigen wir ein weiteres Beispiel für die Berechnung unendlich periodischer Dezimalbrüche:

Zunächst rechnen wir	$41 : 37 = 1 + \text{Rest}$	$1 \cdot 37 = 37$	
Wir berechnen den Rest:	$1 - 7 = 4 \quad \ddot{U}=1$	$4 - (3+1) = 0$	
0 herunterholen und rechnen	$40 : 37 = 1 + \text{Rest}$	$1 \cdot 37 = 37$	
Wir berechnen den Rest:	$0 - 7 = 3 \quad \ddot{U}=1$	$4 - (3+1) = 0$	
0 herunterholen und rechnen	$30 : 37 = 0$	Null hinschreiben	
0 herunterholen und rechnen	$300 : 37 = 8 + \text{Rest}$	$8 \cdot 7 = 56$	$8 \cdot 3 = 24 \quad +5 = 29$
Wir berechnen den Rest:	$0 - 6 = 4 \quad \ddot{U}=1$	$10 - (9+1) = 0 \quad \ddot{U}=1$	$3 - (2+1) = 0$
0 herunterholen und rechnen	$40 : 37 = 1 + \text{Rest}$	$1 \cdot 37 = 37$	

$$41 : 37 = 1,108108 \dots$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 37 \overline{) 41} \\ \underline{37} \\ 40 \\ \underline{37} \\ 30 \\ \underline{29} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \end{array}$$

Wir erkennen, dass sich die Berechnung ab hier ständig wiederholt. Wir erhalten als Ergebnis $1,108\overline{}$ (Sprich: 1, 108 Periode)

2.2.10 Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Umwandlung von Dezimalbrüchen****Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche**

Wir können einen Bruch in eine Dezimalzahl umwandeln, indem wir den Zähler einfach durch den Nenner dividieren. Wir zeigen nun, wie man umgekehrt einen endlichen Dezimalbruch wieder in einen gewöhnlichen Bruch umwandelt. Als Beispiel nehmen wir die Dezimalzahl 3,45.

Wir erinnern uns daran, dass die Nachkommastellen nichts anderes sind als negative Potenzen von 10, also:

$$0,4 = 4 \cdot 10^{-1} = \frac{4}{10} \quad \text{und} \quad 0,45 = 45 \cdot 10^{-2} = \frac{45}{100}$$

Wir können also schreiben: $3,45 = 3 + 0,45 = 3 + \frac{45}{100} = \frac{300}{100} + \frac{45}{100} = \frac{345}{100}$

Im Vorgriff kürzen wir, indem wir Zähler und Nenner durch 5 dividieren:

$$\frac{345}{100} = \frac{345 : 5}{100 : 5} = \frac{69}{20}$$

Wenn wir einen unendlichen periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch umwandeln wollen, dann versagt das o.g. Verfahren, denn: $0,33333... \neq \frac{33333}{100000}$

Zur Lösung dieses Problems kann man sich jedoch eines Rechentricks bedienen, den wir anhand einiger Beispiele zeigen wollen:

(1) Gegeben $a = 0,\overline{3}$ Wir multiplizieren mit $9 = 10 - 1$ $9 \cdot a = (10 - 1) \cdot a = 10 \cdot a - 1 \cdot a = 10 \cdot 0,\overline{3} - 1 \cdot 0,\overline{3} = 3,\overline{3} - 0,\overline{3} = 3$ $\Rightarrow a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(2) Gegeben $a = 0,1\overline{23}$ Wir multiplizieren mit $99 = 100 - 1$ $99 \cdot a = (100 - 1) \cdot a = 100 \cdot a - 1 \cdot a = 100 \cdot 0,1\overline{23} - 1 \cdot 0,1\overline{23} = 12,3\overline{23} - 0,1\overline{23} = 12,3 - 0,1 = 12,2$
 $\Rightarrow a = \frac{12,2}{99} = \frac{122}{990}$ wir kürzen durch 2 $a = \frac{122 : 2}{990 : 2} = \frac{61}{495}$

(3) Gegeben $a = 0,0\overline{423}$ Wir multiplizieren mit $999 = 1000 - 1$ $999 \cdot a = (1000 - 1) \cdot a = 1000 \cdot a - 1 \cdot a = 1000 \cdot 0,0\overline{423} - 1 \cdot 0,0\overline{423} = 42,3\overline{423} - 0,0\overline{423} = 42,3 - 0,0 = 42,3$
 $\Rightarrow a = \frac{42,3}{999} = \frac{423}{9990}$ wir kürzen durch 3 $a = \frac{423 : 3}{9990 : 3} = \frac{141}{3330}$

Regel: Wir multiplizieren die periodische Dezimalzahl a mit der Zehnerpotenz, welche der Anzahl der periodischen Ziffern n entspricht. Von dem Ergebnis wird die periodische Dezimalzahl subtrahiert, so dass folgender Wert entsteht:

$$n \cdot a - 1 \cdot a = (n - 1) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(n - 1) \cdot a}{(n - 1)}$$

Außerdem gilt für die Division generell noch folgendes:

Die Division einer Zahl $\neq 0$ durch 0 ist nicht definiert und damit auch nicht erlaubt.

Die Division 0 durch 0 ist ein unbestimmter nicht definierter Ausdruck

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral

Grundlagen der Arithmetik und Algebra
Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Grundlagen

Grundlagen der Bruchrechnung

Eigentlich gehört dieses Thema zur „Division“. Wegen der besonderen Bedeutung wollen wir der Bruchrechnung jedoch einige separate Videos widmen.

Wir haben die Bruchrechnung bereits einmal erwähnt, nämlich als wir folgendes ausgerechnet hatten:

$23 : 3 = 7 + \frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$

Ein Bruch ist nichts anderes als eine andere Schreibweise der Division, man kann schreiben:

$a : b = \frac{a}{b} = a/b$

Die Bezeichnungen für a und b haben wir bereits wie folgt kennengelernt:

a Dividend oder Zähler b Divisor oder Nenner

Als Operanden werden häufig folgende Geteiltzeichen verwendet:

—	Bruchstrich	:	Doppelpunkt
/	Schrägstrich	÷	Obelus Zeichen

Im Rahmen der Bruchrechnung wird hauptsächlich der Bruchstrich verwendet.

Arten von Brüchen

- Echter Bruch: Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner, also wenn gilt: $a < b$
- Unechter Bruch: Bei einem unechten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner, also wenn gilt: $a > b$
- Gemischter Bruch: Bei einem gemischten Bruch wird zunächst der ganzzahlige Anteil des Bruches und anschließend der verbleibende Anteil als echter Bruch geschrieben.
- Stammbruch: Bei einem Stammbruch ist der Zähler gleich 1 und der Nenner größer 1: $a = 1 ; b > 1$
- Scheinbruch: Von einem Scheinbruch spricht man, wenn der Zähler ein ganzzahliges Vielfaches des Nenners ist, also wenn die Division ohne Rest aufgeht.

Beispiele			
$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{19}$
$\frac{11}{7}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{47}{43}$
$7\frac{3}{8}$	$4\frac{2}{5}$	$23\frac{4}{13}$	$2\frac{7}{25}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{23}$
$\frac{12}{6} = 2$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{65}{13} = 5$

2.2.12 Umrechnung von Brüchen

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Umrechnungen****Umrechnung eines gemischten Bruchs in einen unechten Bruch**

Beispiel: Der gemischte Bruch $7\frac{3}{8}$ soll in einen unechten Bruch umgerechnet werden:

Zunächst kann man den gemischten Bruch auch wie folgt schreiben: $7\frac{3}{8} = 7 + \frac{3}{8}$ Da gilt: $1 = \frac{8}{8}$, so gilt auch $7 = 7 \cdot 1 = 7 \cdot \frac{8}{8} = \frac{56}{8}$ und man kann schreiben: $\frac{56}{8} + \frac{3}{8} = \frac{59}{8}$

Weitere Beispiele:

$$4\frac{2}{5} = 4 + \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$$

$$23\frac{4}{13} = 23 + \frac{4}{13} = 23 \cdot \frac{13}{13} + \frac{4}{13} = \frac{299}{13} + \frac{4}{13} = \frac{303}{13}$$

$$2\frac{7}{25} = 2 + \frac{7}{25} = 2 \cdot \frac{25}{25} + \frac{7}{25} = \frac{50}{25} + \frac{7}{25} = \frac{57}{25}$$

$$12\frac{3}{11} = 12 + \frac{3}{11} = 12 \cdot \frac{11}{11} + \frac{3}{11} = \frac{132}{11} + \frac{3}{11} = \frac{135}{11}$$

$$11\frac{5}{6} = 11 + \frac{5}{6} = 11 \cdot \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{66}{6} + \frac{5}{6} = \frac{71}{6}$$

$$3\frac{2}{7} = 3 + \frac{2}{7} = 3 \cdot \frac{7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{21}{7} + \frac{2}{7} = \frac{23}{7}$$

Allgemein: $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$

In der Praxis können die Zwischenschritte beliebig weggelassen werden.

Umrechnung eines unechten Bruchs in einen gemischten Bruch

Hierzu wird einfach die Division mit Rest wie gewohnt ausgeführt:

Beispiele: $11 : 7 = 1 \text{ Rest } 4 = 1\frac{4}{7}$

$$\begin{array}{r} 1 \ 7 \\ 0 \ 4 \end{array}$$

$22 : 3 = 7 \text{ Rest } 1 = 7\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r} 2 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

$23 : 12 = 1\frac{11}{12}$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ 1 \ 1 \end{array}$$

$134 : 33 = 4\frac{2}{33}$

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 2 \\ 2 \end{array}$$

Mathematik verstehen 1																			
Von den Grundlagen bis zum Integral																			
 Grundlagen der Arithmetik und Algebra Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Kehrwert, Erweitern und Kürzen																			
Kehrwert von Brüchen Bei der Bildung des Kehrwerts von Brüchen werden Zähler und Nenner vertauscht. Ist der Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ gegeben, dann erhalten wir den Kehrwert zu: Der Kehrwert einer reellen Zahl $a \neq 0$ erhalten wir wie folgt: $\frac{b}{a}$ $\frac{1}{a}$	Beispiele: <table><tr><th>Bruch</th><th>Kehrwert</th><th>Bruch</th><th>Kehrwert</th></tr><tr><td>$\frac{7}{13}$</td><td>$\frac{13}{7}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>3</td></tr><tr><td>34</td><td>$\frac{1}{34}$</td><td>$\frac{5}{7}$</td><td>$\frac{7}{5}$</td></tr></table>	Bruch	Kehrwert	Bruch	Kehrwert	$\frac{7}{13}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{1}{3}$	3	34	$\frac{1}{34}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$						
Bruch	Kehrwert	Bruch	Kehrwert																
$\frac{7}{13}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{1}{3}$	3																
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$																
Erweitern von Brüchen Bei der Erweiterung von Brüchen werden Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Erweiterung von $\frac{a}{b}$ durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit der reellen Zahl $k \neq 0$. Bei der Erweiterung eines Bruches, wird der Wert des Bruches nicht verändert. $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$	Beispiele: <table><tr><th>Bruch</th><th>Erweitert mit Zahl</th><th>Ergibt</th><th>Bruch</th><th>Erweitert mit Zahl</th><th>Ergibt</th></tr><tr><td>$\frac{34}{1}$</td><td>$3 \Rightarrow$</td><td>$\frac{34 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{102}{3}$</td><td>$\frac{56}{65}$</td><td>$4 \Rightarrow$</td><td>$\frac{56 \cdot 4}{65 \cdot 4} = \frac{224}{260}$</td></tr><tr><td>$\frac{5}{7}$</td><td>$7 \Rightarrow$</td><td>$\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{35}{49}$</td><td>$\frac{17}{13}$</td><td>$12 \Rightarrow$</td><td>$\frac{17 \cdot 12}{13 \cdot 12} = \frac{204}{156}$</td></tr></table>	Bruch	Erweitert mit Zahl	Ergibt	Bruch	Erweitert mit Zahl	Ergibt	$\frac{34}{1}$	$3 \Rightarrow$	$\frac{34 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{102}{3}$	$\frac{56}{65}$	$4 \Rightarrow$	$\frac{56 \cdot 4}{65 \cdot 4} = \frac{224}{260}$	$\frac{5}{7}$	$7 \Rightarrow$	$\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{35}{49}$	$\frac{17}{13}$	$12 \Rightarrow$	$\frac{17 \cdot 12}{13 \cdot 12} = \frac{204}{156}$
Bruch	Erweitert mit Zahl	Ergibt	Bruch	Erweitert mit Zahl	Ergibt														
$\frac{34}{1}$	$3 \Rightarrow$	$\frac{34 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{102}{3}$	$\frac{56}{65}$	$4 \Rightarrow$	$\frac{56 \cdot 4}{65 \cdot 4} = \frac{224}{260}$														
$\frac{5}{7}$	$7 \Rightarrow$	$\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{35}{49}$	$\frac{17}{13}$	$12 \Rightarrow$	$\frac{17 \cdot 12}{13 \cdot 12} = \frac{204}{156}$														
Kürzen von Brüchen Bei der Kürzung von Brüchen werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Kürzung von $\frac{a}{b}$ durch Division von Zähler und Nenner mit der reellen Zahl $k \neq 0$. Bei der Kürzung eines Bruches, wird der Wert des Bruches nicht verändert. Wenn man ganzzahlige Zähler und Nenner eines Bruches durch den größten gemeinsamen Teiler dividiert dann lassen sich Zähler und Nenner nicht mehr weiter ganzzahlig kürzen. $\frac{a / k}{b / k} = \frac{a : k}{b : k} = \frac{a}{b}$	Beispiele: <table><tr><th>Bruch</th><th>Gekürzt durch Zahl</th><th>Ergibt</th><th>Bruch</th><th>Gekürzt durch Zahl</th><th>Ergibt</th></tr><tr><td>$\frac{15}{3}$</td><td>$3 \Rightarrow$</td><td>$\frac{15 / 3}{3 / 3} = \frac{5}{1}$</td><td>$\frac{55}{65}$</td><td>$5 \Rightarrow$</td><td>$\frac{55 / 5}{65 / 5} = \frac{11}{13}$</td></tr><tr><td>$\frac{35}{14}$</td><td>$7 \Rightarrow$</td><td>$\frac{35 / 7}{14 / 7} = \frac{5}{2}$</td><td>$\frac{136}{221}$</td><td>$17 \Rightarrow$</td><td>$\frac{136 / 17}{221 / 17} = \frac{8}{13}$</td></tr></table>	Bruch	Gekürzt durch Zahl	Ergibt	Bruch	Gekürzt durch Zahl	Ergibt	$\frac{15}{3}$	$3 \Rightarrow$	$\frac{15 / 3}{3 / 3} = \frac{5}{1}$	$\frac{55}{65}$	$5 \Rightarrow$	$\frac{55 / 5}{65 / 5} = \frac{11}{13}$	$\frac{35}{14}$	$7 \Rightarrow$	$\frac{35 / 7}{14 / 7} = \frac{5}{2}$	$\frac{136}{221}$	$17 \Rightarrow$	$\frac{136 / 17}{221 / 17} = \frac{8}{13}$
Bruch	Gekürzt durch Zahl	Ergibt	Bruch	Gekürzt durch Zahl	Ergibt														
$\frac{15}{3}$	$3 \Rightarrow$	$\frac{15 / 3}{3 / 3} = \frac{5}{1}$	$\frac{55}{65}$	$5 \Rightarrow$	$\frac{55 / 5}{65 / 5} = \frac{11}{13}$														
$\frac{35}{14}$	$7 \Rightarrow$	$\frac{35 / 7}{14 / 7} = \frac{5}{2}$	$\frac{136}{221}$	$17 \Rightarrow$	$\frac{136 / 17}{221 / 17} = \frac{8}{13}$														

2.2.14 Bruchrechnung – Addition

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Addition****Addition von Brüchen**

Zum Addieren zweier oder mehrerer Brüche müssen diese zunächst gleichnamig gemacht werden. Man sagt auch: „Die Brüche werden auf einen gemeinsamen Nenner gebracht.“

Der gemeinsame Nenner heißt Hauptnenner und kann das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner oder auch ein Vielfaches davon sein. Wir wollen dies anhand eines Beispiels näher erläutern:

Wir erweitern nun den 1. Bruch mit 5 und den 2. Bruch mit 3 und erhalten folgendes:

Beispiel:

$$\frac{4}{9} + \frac{13}{15} = x \quad \text{Das kgV von 9 und 15 ist } 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

$$\frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 5} + \frac{13 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{20}{45} + \frac{39}{45} = \frac{20 + 39}{45} = \frac{59}{45}$$

Als weiteres Beispiel addieren wir die Brüche $\frac{5}{7} + \frac{17}{15} = x$ Das kgV von 7 und 15 ist $7 \cdot 15 = 105 \Rightarrow$

$$\frac{5 \cdot 15}{7 \cdot 15} + \frac{17 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{75}{105} + \frac{119}{105} = \frac{75 + 119}{105} = \frac{194}{105}$$

Dieses Beispiel ist insofern interessant, weil das kgV der Nenner gleich dem Produkt der Nenner ist. Dies liegt natürlich daran, dass die 7 eine Primzahl ist. Allgemein kann man jetzt schreiben:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Allgemein gilt also folgende Regel für die Addition von Brüchen:

Wir erweitern den ersten Bruch mit dem Nenner des zweiten Bruches und den zweiten Bruch mit dem Nenner des ersten Bruches. Der gemeinsame Hauptnenner ist dann das Produkt aus den beiden Nennern. Zum Schluss sind die beiden Produkte aus Zähler 1. Bruch mal Nenner 2. Bruch und Zähler 2. Bruch mal Nenner 1. Bruch zu addieren.

Man muss also für die Addition von Brüchen nicht unbedingt den kgV bilden, sondern kann auch nach der og. Regel verfahren und bei Bedarf dann anschließend kürzen.

Weitere Beispiele:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{Kürzen durch 2} \quad \frac{7}{12} + \frac{3}{12} = \frac{10}{12} = \frac{10/2}{12/2} = \frac{5}{6}$$

Hier brauchen wir nicht gleichnamig zu machen.

$$\frac{7}{8} + \frac{13}{12} = \frac{7 \cdot 12}{8 \cdot 12} + \frac{13 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{84 + 104}{96} = \frac{188}{96} = \frac{188/4}{96/4} = \frac{47}{24}$$

Hauptnenner = $8 \cdot 12 = 96$

$$\frac{19}{9} + \frac{5}{6} = \frac{19 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{38 + 15}{18} = \frac{53}{18}$$

Hauptnenner = kgV = 18

2.2.15 Bruchrechnung – Addition und Subtraktion

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Addition und Subtraktion****Subtraktion von Brüchen**

Werden zwei Brüche subtrahiert, kann man schreiben:

$$-\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = (-1) \cdot \frac{a}{b} + (-1) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \quad \text{mit } a, b, c \text{ und } d > 0$$

Man kann also die Subtraktion als Addition der Brüche mit anschließender Multiplikation mit (-1) auffassen. Es gelten demnach dieselben Rechenregeln wie bei der Addition.

Beispiele:

$$\begin{aligned} &\text{kgV} = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \\ &-\frac{17}{12} - \frac{21}{9} = (-1) \cdot \left(\frac{17 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{21 \cdot 4}{9 \cdot 4}\right) = (-1) \cdot \frac{51 + 84}{36} = -\frac{135}{36} = -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{kgV} = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70 \\ &-\frac{7}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2} = (-1) \cdot \left(\frac{7 \cdot 14}{5 \cdot 14} + \frac{1 \cdot 10}{7 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 35}{2 \cdot 35}\right) = (-1) \cdot \left(\frac{98 + 10 + 35}{70}\right) = -\frac{143}{70} \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Wird ein Bruch von einem anderen positiven Bruch subtrahiert, dann handelt es sich ebenfalls um eine Addition eines negativen Bruches, es gilt:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{-c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d} \quad \text{mit } a, b, c \text{ und } d > 0$$

$$\begin{aligned} &\text{kgV} = 17 \cdot 7 = 119 \\ &\frac{14}{17} - \frac{1}{7} = \frac{14 \cdot 7}{17 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 17}{7 \cdot 17} = \frac{98 - 17}{119} = \frac{81}{119} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{kgV} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \\ &\frac{24}{10} - \frac{47}{12} - \frac{43}{4} = \frac{24 \cdot 6}{10 \cdot 6} - \frac{47 \cdot 5}{12 \cdot 5} - \frac{43 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{144 - 235 - 645}{60} = -\frac{736}{60} = -\frac{184}{15} \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion von gemischten Brüchen

Gemischte Brüche können addiert oder subtrahiert werden, indem man diese in unechte Brüche umwandelt und anschließend die Berechnung wie gewohnt durchführt, z.B.:

Aber es gibt auch eine andere Methode, bei der die ganzzahligen Anteile separat von den gebrochenen Anteilen addiert und subtrahiert werden. In unserem Beispiel sieht dies so aus:

$$\begin{aligned} &\text{kgV} = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ &3\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{15}{4} + \frac{17}{3} - \frac{5}{2} = \frac{45 + 68 - 30}{12} = \frac{83}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{kgV} = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ &3\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 3 + 5 - 2 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 6 + \frac{9 + 8 + 6}{12} = 6 + \frac{11}{12} = \frac{83}{12} \end{aligned}$$

2.2.16 Bruchrechnung – Multiplikation

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Multiplikation****Multiplikation von Brüchen**

Die Multiplikation haben wir als wiederholte Addition eingeführt. Wenn wir nun eine ganze Zahl mit einem Bruch multiplizieren, dann können wir dies z.B. wie folgt schreiben:

Die 7 können wir auch $7 = \frac{7}{1}$ Damit können wir die obige Aufgabe auch in folgender Weise formulieren:

Wir fragen uns jetzt, wie man die folgende Aufgabe rechnet: $\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = x$

Nun, die Antwort ist einfach: „Wir multiplizieren zwei Brüche, indem man ihre Zähler und Nenner miteinander multipliziert“. Also lösen wir unsere Aufgabe wie folgt:

Allgemein können wir dies wie folgt schreiben:

Bei der Multiplikation mehrerer Brüche verfährt man analog, z.B. bei 3 Brüchen:

$$7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2+2+2+2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{7}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

Beispiele:

$$\frac{5}{13} \cdot \frac{7}{11} = \frac{5 \cdot 7}{13 \cdot 11} = \frac{35}{143}$$

$$\frac{13}{4} \cdot \frac{12}{11} = \frac{13 \cdot 12}{4 \cdot 11} = \frac{156}{44} = \frac{39}{11}$$

Kürzen durch 4

$$\frac{13}{4} \cdot \frac{12}{11} = \frac{13 \cdot \frac{12}{4}}{\frac{4}{4} \cdot 11} = \frac{13 \cdot 3}{1 \cdot 11} = \frac{39}{11}$$

Beim vorigen Beispiel hätten wir schon im Vorfeld durch 4 kürzen können:

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{12} \cdot 13}{\cancel{4} \cdot 11 \cdot \cancel{21}} = \frac{13}{11}$$

Hier gilt: $7 \cdot 12 = 4 \cdot 21 = 84$

Wir kürzen also entsprechend und schreiben direkt das Ergebnis hin.

2.2.17 Bruchrechnung – Division

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Bruchrechnung Division****Division von Brüchen**

Die Division reeller Zahlen haben wir als Umkehroperation zur Multiplikation eingeführt.

Also können wir dies auch bei der Division von Brüchen so machen. Es gilt:

Wir wollen nun folgende Aufgabe rechnen: $14 : 7 = 2$ Hierfür können wir auch schreiben:

Diese Gleichung geht nur auf, wenn die $\frac{14}{1}$ mit dem Kehrwert von $\frac{7}{1}$ multipliziert wird:

Wenn wir dieses Prinzip verallgemeinern dann erhalten wir die folgende Rechenregel:

Eine derartige Division kann man auch als sogenannten Doppelbruch schreiben:

Bei der Division mehrerer Brüche gilt, wie bei der normalen Division, dass die Berechnung immer von links nach rechts durchgeführt wird, also:

$$7 = \frac{7}{1} \quad \text{und} \quad 14 = \frac{14}{1}$$

$$\frac{14}{1} : \frac{7}{1} = 2$$

$$\frac{14}{1} : \frac{7}{1} = \frac{14}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{14 \cdot 1}{1 \cdot 7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{e}{f} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} : \frac{e}{f} = \frac{a \cdot d \cdot f}{b \cdot c \cdot e}$$

Beispiele:

$$\frac{5}{13} : \frac{7}{11} = \frac{5}{13} \cdot \frac{11}{7} = \frac{5 \cdot 11}{13 \cdot 7} = \frac{55}{91}$$

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{26} = \frac{5}{8} \cdot \frac{26}{7} = \frac{5 \cdot 26}{8 \cdot 7} = \frac{130}{56} = \frac{65}{28}$$

(Kürzen durch 2)

Auch hier hätte man schon im Vorfeld kürzen können:

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{26} = \frac{5}{8} \cdot \frac{26}{7} = \frac{5 \cdot \frac{26}{2}}{\frac{8}{2} \cdot 7} = \frac{5 \cdot 13}{4 \cdot 7} = \frac{65}{28}$$

Regel: Wir dividieren Brüche, indem wir den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multiplizieren.

Multiplikation und Division von gemischten Brüchen

Will man gemischte Brüche multiplizieren oder dividieren, so ist es zweckmäßig, diese zunächst in unechte Brüche umzuwandeln und anschließend die Berechnung wie gewohnt durchzuführen:

Beispiele:

$$5\frac{5}{8} \cdot 3\frac{2}{7} = \frac{45}{8} \cdot \frac{23}{7} = \frac{45 \cdot 23}{8 \cdot 7} = \frac{1035}{56}$$

$$3\frac{7}{16} : 8\frac{3}{4} = \frac{55}{16} : \frac{35}{4} = \frac{55}{16} \cdot \frac{4}{35} = \frac{55 \cdot 4}{16 \cdot 35} = \frac{55 \cdot \frac{4}{4}}{\frac{16}{4} \cdot \frac{35}{5}} = \frac{11 \cdot 1}{4 \cdot 7} = \frac{11}{28}$$

Hier haben wir bereits im Vorfeld gekürzt, so dass eine erheblich Reduzierung des Rechenaufwands erreicht wurde.

Mathematik verstehen 1

Von den Grundlagen bis zum Integral

Grundlagen der Arithmetik und Algebra
Rechnen mit reellen Zahlen – Reihenfolge der Rechenoperationen

Reihenfolge der Rechenoperationen	
Wenn Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gleichermaßen vorkommen, dann müssen die Regeln für die Reihenfolge der Operationen eingehalten werden.	
Wir fangen mit einem einfachen Beispiel an:$14 + 7 \cdot 3 = x$ Man könnte zum Beispiel von links nach rechts rechnen:$14 + 7 = 21 \text{ und } 21 \cdot 3 = 63$ Vertauschen wir die Faktoren, so folgt:$14 + 3 \cdot 7 = x$ Wir rechnen wieder von links nach rechts:$14 + 3 = 17 \text{ und } 17 \cdot 7 = 119$ Da in der Mathematik die Ergebnisse solcher Berechnungen immer eindeutig sein müssen, können die bisherigen Versuche nicht korrekt sein.	Wir nehmen jetzt ein Beispiel mit Subtraktion:$14 - 7 \cdot 3 = x$ Wir stellen dieselben Überlegungen an wie bei der Addition und erhalten Folgendes: „Wenn in der Berechnung ein Produkt und eine Subtraktion vorkommen, dann ist das Produkt zuerst auszurechnen und anschließend die Subtraktion auszuführen“: $7 \cdot 3 = 21 \text{ und } 14 - 21 = -7$ Weitere Beispiele:$\begin{array}{l l} -25 - 6 \cdot 3 - 15 - 4 \cdot 3 = -25 - \overbrace{18}^{6 \cdot 3} - 15 - \overbrace{12}^{4 \cdot 3} = -70 & 3 \cdot 9 - 8 - 2 \cdot 2 + 7 = \overbrace{27}^{3 \cdot 9} - 8 - \overbrace{4}^{2 \cdot 2} + 7 = 22 \end{array}$
Beim nächsten Versuch rechnen wir zuerst $7 \cdot 3$ und addieren anschließend:$7 \cdot 3 = 21 \text{ und } 21 + 14 = 35$ Vertauschen wir jetzt die Faktoren, so folgt:$3 \cdot 7 = 21 \text{ und } 21 + 14 = 35$ Dies ist exakt dasselbe Ergebnis wie vor der Vertauschung und somit eindeutig.	
Regel: „Wenn in der Berechnung ein Produkt und eine Addition vorkommen, dann ist das Produkt zuerst auszurechnen und anschließend die Addition durchzuführen“.	Wenn wir noch die Division hinzunehmen, dann haben wir die Rechenregeln für die vier Grundrechenarten ermittelt. Wieder ein einfaches Beispiel: $14 + 6 : 3 = x$ Da die Division die Umkehroperation zur Multiplikation ist, folgt:$14 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 14 + \frac{6}{3} = 14 + 2 = 16$
Beispiele:$27 + 2 \cdot 41 + 37 + 11 \cdot 3 = 27 + \overbrace{82}^{2 \cdot 41} + 37 + \overbrace{33}^{11 \cdot 3} = 179$ $3 \cdot 9 + 16 + 7 \cdot 7 + 25 = \overbrace{27}^{3 \cdot 9} + 16 + \overbrace{49}^{7 \cdot 7} + 25 = 117$	Wir multiplizieren zunächst die Produkte und addieren anschließend alles auf. Regel: Bei der kombinierten Anwendung der Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind zunächst alle Multiplikationen und Divisionen auszuführen und anschließend die Additionen und Subtraktionen. Man kann auch sagen: „Punktrechnung vor Strichrechnung“.

2.2.18.2 Kombinierte Verwendung aller Grundrechenarten

Mathematik verstehen 1**Von den Grundlagen bis zum Integral****Grundlagen der Arithmetik und Algebra****Rechnen mit reellen Zahlen – Reihenfolge der Rechenoperationen****Reihenfolge der Rechenoperationen**

Fazit: Im Sinne der Reihenfolge der Berechnungen stellen Multiplikation und Division höherrangige Rechenoperationen dar. Wir werden später noch höherrangigere Operationen kennenlernen, welche dann natürlich zuerst durchgeführt werden müssen.

Grundsätzlich gilt: höherrangige Rechenoperationen werden zuerst und anschließend die nachrangigen Operationen ausgeführt.

Beispiele für die kombinierte Verwendung aller vier Grundrechenarten:

$$4 + 2 \cdot 3 - 8 : 4 = 4 + \overbrace{2 \cdot 3}^6 - \overbrace{8 : 4}^2 = 8$$

$$3\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{4}{3} - 3 : 6 = \frac{13}{4} + \frac{8}{3} - \frac{3}{6} = \frac{39 + 32 - 6}{12} = \frac{65}{12}$$

kgV = $2^2 \cdot 3 = 12$

$$14 + 6 : 3 - 14 \cdot 2 : 4 = 14 + \overbrace{6 : 3}^2 - \overbrace{14 \cdot 2 : 4}^{14 + 2} = 16 - 7 = 9 \quad \text{oder auch}$$

$$14 + 6 : 3 - 14 \cdot 2 : 4 = 14 + \overbrace{6 : 3}^2 - 14 \cdot \overbrace{2 : 4}^{\frac{1}{2}} = 16 - 7 = 9$$

$$\frac{-12}{3} + 6 \cdot 3 - 21 : 7 = \frac{\overbrace{-12}^{-4} + \overbrace{6 \cdot 3}^{18} - \overbrace{21 : 7}^3}{\overbrace{25 : 5}^5 + 6} = \frac{-4 + 18 - 3}{5 + 6} = \frac{11}{11} = 1$$

Zum Schluss noch ein etwas komplexeres Beispiel:

Multiplikation mit Kehrwert: $\frac{9}{2} : \frac{7}{4} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 7}$

Kürzen durch 4: $\frac{8}{7 \cdot 4} = \frac{8 : 4}{7 \cdot 4 : 4} = \frac{2}{7}$

Kürzen durch 2: $\frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \frac{9 \cdot \frac{4}{2}}{2 \cdot 7} = \frac{18}{7}$

Erweitern mit 7: $2 \cdot \frac{7}{7} = \frac{14}{7}$

6 : 3 = 2

$$\frac{9}{2} : \frac{7}{4} + \frac{8}{7 \cdot 4} - 6 : 3 = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 7} + \frac{2}{7} - 2 = \frac{18}{7} + \frac{2}{7} - \frac{14}{7} = \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 1} = \frac{36}{7}$$

5 : 2 = $\frac{5}{2}$

kgV = $2 \cdot 3 = 6$

Multiplikation mit Kehrwert: $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 1} = \frac{36}{7}$

Man sollte nicht zu viele Rechenschritte auf einmal durchführen. Durch die schrittweise und ausführliche Berechnung werden Rechenfehler vermieden. Es bleibt natürlich jedem selbst überlassen, inwieweit Rechenschritte zusammengefasst werden, um den Schreibaufwand zu verringern.